

**Evaluación Interna de Matemáticas: La certeza del uso de ecuaciones
diferenciales para la modelación de fenómenos físicos.**

Código de alumno: 

Número de páginas: 15



CONSENTIMIENTO

Este trabajo fue cedido por Joaquín Rubilar, alumno egresado el año 2024.

Cualquier modificación al mismo, como también cualquier extracción de su contenido o información para ser utilizado en demás trabajos constituye una falta a la probidad académica y se encuentra totalmente prohibida.

Introducción

Desde muy pequeño me ha llamado la atención mi curiosidad por conocer y entender la realidad de las cosas físicas, buscar respuestas a “porques”. Lo que da a entender mi gran gusto por las ciencias naturales, específicamente la física. Esta última es un área de conocimiento perteneciente a las ciencias naturales, la cual comúnmente utiliza métodos y herramientas matemáticos para justificar su certeza respecto al modelamiento generalizado sobre un fenómeno. Estos modelos generalmente tienen alguna restricción, generalmente para condiciones ideales, las cuales se deben tener en cuenta a la hora de realizar predicciones con éste, tal cual como lo puede ser ignorar la resistencia del aire en un lanzamiento parabólico.

A inicios del 2023, se estudiaron en la asignatura de física los fenómenos relacionados con movimientos armónicos simples, como lo es un péndulo en condiciones ideales, sin aire tal que represente un movimiento perpetuo. Pero, durante el estudio del fenómeno, las teorías y modelos matemáticos fueron otorgados de tal forma que se debía confiar plenamente en ellos sin certeza de ser matemáticamente comprobado. Debido a mis gustos matemáticos e intereses personales científicos, mis necesidades de modelar personalmente matemáticamente el fenómeno surgieron.

“Desde Newton, la humanidad se ha dado cuenta de que las leyes de la física siempre se expresan en el lenguaje de ecuaciones diferenciales.” (Steven Strogatz). Según la cita del matemático estadounidense Steven Strogatz, en otras palabras, son las ecuaciones diferenciales que permiten determinar modelos matemáticos que representen fenómenos de la realidad. Por lo que, en este trabajo se buscará determinar un modelo matemático a través de ecuaciones diferenciales que represente el movimiento de un péndulo simple y luego comparar los resultados teóricos con los experimentales, evaluando la certeza del uso de ecuaciones diferenciales para la modelación de fenómenos físicos.

Marco teórico

Los péndulos existen y funcionan debido a la existencia de la aceleración de gravedad que ejerce la tierra sobre todo objeto. Esta aceleración al ser vectorial, tiene un sentido que apunta siempre al centro de la tierra, por lo que es una componente vectorial de la aceleración que actúa sobre el péndulo para que constantemente esté buscando el punto de equilibrio.

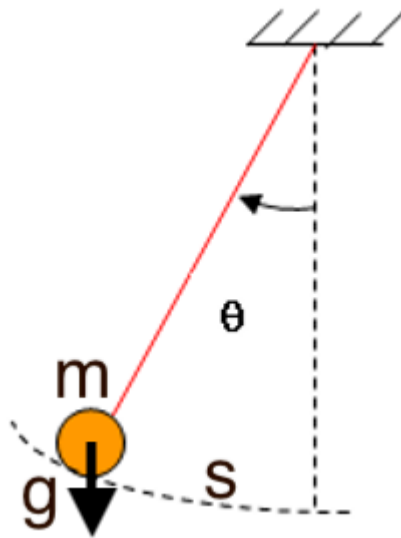


Fig 1. Situación Teórica

Como se observa en la imagen (Fig 1), la aceleración está siendo representada por la letra g con sentido hacia abajo. m representa la masa puntual, s la distancia desplazada del eje de equilibrio y θ el ángulo de apertura. Cuando se habla de péndulo simple, se está refiriendo a un sistema de movimiento armónico simple, por lo que el péndulo estaría funcionando para siempre cuando sea desplazado a una cierta s . En la realidad, no funcionan eternamente, debido a los factores externos, como lo es el roce con el aire, que ejerce constantemente una fuerza en sentido opuesto al desplazamiento del péndulo, terminando en el eje de equilibrio donde $\theta = 0$. El movimiento característico del péndulo se genera producto de la inercia de la masa puntual, por ejemplo, cuando $|s|$ es máxima, la componente de la aceleración de gravedad con dirección opuesta a s es máxima, tal que cuando la masa llegue al eje central no habrá un componente de la aceleración debido a que $\theta = 0$, pero la velocidad será máxima, provocando que el péndulo vuelva a subir hasta s máximo.

En condiciones ideales sin factores externos este proceso se repite de manera indefinida.

Procedimiento

La metodología utilizada para llevar esta exploración matemática a cabo se resume en los siguientes pasos:

1. Determinar una ecuación diferencial a partir del análisis del comportamiento del péndulo.
2. Resolver la ecuación diferencial para encontrar un modelo matemático que representa teóricamente la situación.
3. Grabar experimentalmente un objeto comportándose como un péndulo simple.
4. Analizar el video grabado en el software Tracker para obtener los datos experimentales.
5. Determinar a partir de los datos experimentales una regresión que se ajuste a los datos obtenidos.
6. Realizar una comparación entre el modelo determinado teóricamente a partir de las ecuaciones diferenciales y el modelo encontrado a partir de los datos experimentales.
7. Concluir respecto a los resultados sobre el uso de ecuaciones diferenciales para el modelo de situaciones reales.

Determinar la ecuación diferencial

Como se ha mencionado anteriormente, es por efecto del componente de la aceleración de gravedad con sentido opuesto al desplazamiento s que permite el fenómeno existir. Entonces, se sabe que este componente será una aceleración.

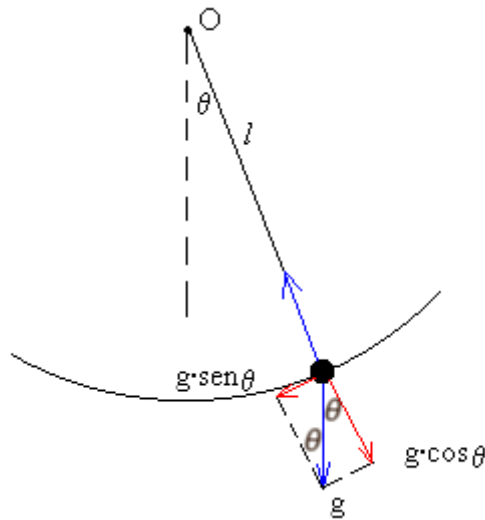


Fig 2. Vectores

En la imagen (Fig 2), se representa el vector de la aceleración de gravedad junto con sus componentes. Utilizando las propiedades de los triángulos, se pueden determinar los ángulos de los vectores y así la expresión algebraica de éstos.

$$a = -g \cdot \sin(\theta) \quad [\text{Ec. 1}]$$

Donde a representa la componente de la aceleración de gravedad que hace efecto en el arco s de la masa puntual. Es negativa debido a que debe ser opuesta a la dirección del desplazamiento, ello para que el ciclo del péndulo se cumpla. Al reescribir a como la segunda derivada de s la expresión queda así:

$$\frac{d^2s}{dt} = -g \cdot \sin(\theta) \quad [\text{Ec. 2}]$$

Si θ se trabaja en radianes, que es el caso, se sabe que $s = \theta \cdot l$, donde l representa la longitud de la recta que une al péndulo (Fig. 2) (La cuerda). Reemplazando para s la ecuación queda así:

$$\frac{d^2(\theta \cdot l)}{dt} = -g \cdot \sin(\theta) \quad [\text{Ec. 3}]$$

Debido a que l es una constante, la expresión puede quedar así:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \text{sen}(\theta) \quad [\text{Ec. 4}]$$

Esta última sería la ecuación diferencial que modelaría el péndulo simple. Se debe aclarar que en esta ecuación no se está teniendo en cuenta la disipación de energía por efectos externos, tales como lo sería el roce del aire. Para incrementar la precisión del modelo, se le puede agregar un término que establezca resistencia a la aceleración sobre el péndulo, simulando los efectos externos de la pérdida de energía, proceso que se realizará una vez que se determine el modelo. Una de las condiciones iniciales del caso es que no se utilizarán ángulos mayores que 20° para θ , esto permite simplificar la ecuación diferencial ya que para ángulos aproximadamente menores que 20° , $\text{sen}(\theta) \approx \theta$. Esta será una limitación del modelo, pero para el péndulo simple en ángulos pequeños deberá funcionar. Simplificando:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \theta \quad [\text{Ec. 5}]$$

Si $s = \theta \cdot l$, al dividir en ambos lados por t se obtiene:

$$\frac{s}{t} = \frac{\theta \cdot l}{t} \quad [\text{Ec. 6}]$$

Donde $\frac{\theta}{t}$ representa la velocidad angular en $[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]$, que se representará con ω .

Tal que:

$$\theta = \omega \cdot t \quad [\text{Ec. 7}]$$

En la Ec. 5, se puede analizar que la función $\theta(t)$ está siendo derivada dos veces y retornando la misma función $\theta(t)$ multiplicada por una constante. La expresión $A \cdot e^{ct}$ retorna la función original multiplicada por una constante al derivarla dos veces, donde A y c son dos constantes. Entonces:

$$\theta(t) = A \cdot e^{ct} \quad [\text{Ec. 8}]$$

$$\frac{d\theta}{dt} = A \cdot c \cdot e^{ct} \quad [\text{Ec. 9}]$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = A \cdot c^2 \cdot e^{ct} \quad [\text{Ec. 10}]$$

Al reemplazar en la Ec. 11:

$$A \cdot c^2 \cdot e^{ct} = A \cdot e^{ct} \left(-\frac{g}{l}\right) \quad [\text{Ec. 11}]$$

Simplificando:

$$c^2 = -\frac{g}{l} \quad [\text{Ec. 12}]$$

$$|c| = \sqrt{-\frac{g}{l}} \quad [\text{Ec. 13}]$$

$$c = \pm \sqrt{-\left(\frac{g}{l}\right)} \quad [\text{Ec. 14}]$$

$$c = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}} \quad [\text{Ec. 15}]$$

Reemplazando c en $\theta(t) = A \cdot e^{ct}$ se obtiene:

$$\theta(t) = A \cdot e^{\pm i \cdot t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}} \quad [\text{Ec. 16}]$$

Al analizar correctamente la ecuación anterior (Ec. 16), se puede observar que es posible establecer una relación con la identidad de Euler. La cual es la siguiente:

$$e^{\pm i \cdot \theta} = \cos(\theta) \pm i \cdot \sin(\theta)$$

En la Ec. 16 se observa que se tiene $e^{\pm i \cdot t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}}$ donde $t \sqrt{\frac{g}{l}}$ debería ser igual al ángulo θ para poder utilizar la identidad de Euler, hacer eso tiene sentido físico, ya se definió en la Ec. 7, de la cual se puede concluir que lo que multiplique a t será igual al ángulo. $\theta = \omega \cdot t$. Por lo que se puede deducir que la velocidad angular tiene que ser $\sqrt{\frac{g}{l}}$ para satisfacer la identidad de Euler. Tal que:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad [\text{Ec. 17}]$$

La Ec. 16 quedaría así:

$$\theta(t) = A \cdot e^{\pm i \cdot \omega \cdot t} \quad [\text{Ec. 18}]$$

Aplicando la identidad de Euler:

$$\theta(t) = A \cdot (\cos(\omega \cdot t) \pm i \cdot \sin(\omega \cdot t)) \quad [\text{Ec. 19}]$$

$$\theta(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t) \pm i \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad [\text{Ec. 20}]$$

Al definir las siguientes constantes:

$$C_1 = A$$

$$C_2 = \pm i \cdot A$$

Se puede encontrar un modelo general para el ángulo θ en función del tiempo:

$$\theta(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \quad [\text{Ec. 21}]$$

Para encontrar un modelo específico para este caso particular de péndulo simple, primero se deben establecer las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \theta_0 \\ \frac{d\theta(0)}{dt} &= 0 \text{ [rad} \cdot \text{s}^{-1}] \end{aligned}$$

Evalutando en $\theta(0) = \theta_0$ en el modelo general (Ec. 21) se obtiene que:

$$C_1 = \theta_0$$

Para evaluar en $\frac{d\theta(0)}{dt} = 0 \text{ [rad} \cdot \text{s}^{-1}]$, primero se debe determinar $\frac{d\theta(t)}{dt}$ a partir del modelo general. Derivando Ec. 21 se obtiene:

$$\frac{d\theta}{dt} = -C_1 \omega \sin(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t) \quad [\text{Ec. 22}]$$

Evalutando en $\frac{d\theta(0)}{dt} = 0 \text{ [rad} \cdot \text{s}^{-1}]$, se obtiene que:

$$C_2 = 0 \text{ [rad} \cdot \text{s}^{-1}]$$

Entonces reemplazando los nuevos valores de C_1 y C_2 en el modelo general (Ec. 21) se obtiene:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \quad [\text{Ec. 23}]$$

Para concluir el modelo específico, se disminuirá el error de éste agregando un término que regule el movimiento del péndulo teniendo en cuenta una constante que contendrá los factores externos, tales como el roce con el aire. Analizando desde la perspectiva deductiva, sería la velocidad angular la que disminuye con el transcurso del tiempo por efectos de la disipación de energía. Entonces, al evaluar tasa de cambio de la velocidad angular respecto del tiempo se obtiene:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{g}{l}} \\ \frac{d\omega}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Dando que $\sqrt{\frac{g}{l}}$ es constante mientras que no haya pérdida de energía o cambios en la velocidad angular. Se agregará un término negativo que disminuirá la velocidad angular proporcionalmente a la velocidad angular en ese instante de tiempo. Tal que:

$$\frac{d\omega}{dt} = -u \cdot \omega \quad [\text{Ec. 24}]$$

$$\omega = - \int u \omega dt \quad [\text{Ec. 25}]$$

$$\omega = -u\omega t + C_3 \quad [\text{Ec. 26}]$$

$$\omega + u\omega t = C_3 \quad [\text{Ec. 27}]$$

$$\omega(1 + ut) = C_3 \quad [\text{Ec. 28}]$$

$$\omega = \frac{C_3}{1+ut} \quad [\text{Ec. 29}]$$

La constante de integración C_3 resulta ser $\sqrt{\frac{g}{l}}$ debido a que en el tiempo $t = 0$ la velocidad angular se convierte en $\omega = C_3$ siendo constante, igual que $\sqrt{\frac{g}{l}}$, por lo que la velocidad angular sería:

$$\omega(t) = \frac{\sqrt{\frac{g}{l}}}{1+ut} \quad [\text{Ec. 30}]$$

Teniendo así una velocidad angular que depende cambia con el transcurso del tiempo, variando según la constante u , que definiría todos los efectos externos al péndulo, teóricamente haciendo la ecuación más realista. Reemplazando ω en $\theta(t)$ se obtiene:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\frac{\sqrt{\frac{g}{l}}}{1+ut} t\right) \quad [\text{Ec. 31}]$$

La ecuación anterior (Ec. 28) representa el modelo específico para el caso del péndulo simple que cumple con las condiciones ideales. Pero, esta ecuación describe cómo varía el ángulo θ respecto del tiempo, mientras que los datos que se obtendrán experimentalmente están propuestos para describir cómo varía el desplazamiento horizontal del péndulo, por lo que esta ecuación debe ser adaptada para ello, con el objetivo de modelar teóricamente el fenómeno físico.

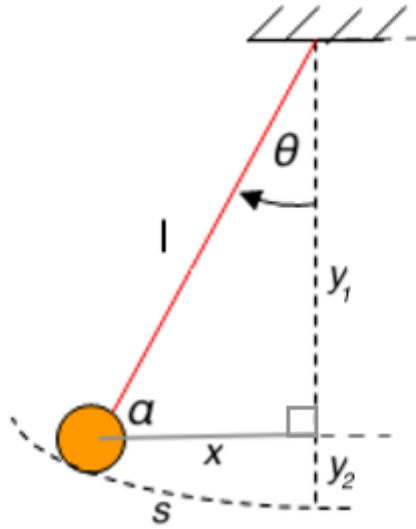


Fig 3. Variables Conocidas

En la imagen (Fig 3.) se pueden observar las variables conocidas del sistema, de las cuales es en función de x respecto del tiempo que se busca dejar el modelo (Ec. 31). Usando la razón trigonométrica seno y teniendo en cuenta que $s = \theta \cdot l$ entonces:

$$\text{sen}(\theta(t)) = \frac{x}{l} \quad [\text{Ec. 32}]$$

$$\theta(t) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{l}\right) \quad [\text{Ec. 33}]$$

Reemplazando $\theta(t)$ en Ec. 31 y definiendo que si θ_0 es el desplazamiento angular máximo, entonces x_0 será el desplazamiento horizontal máximo:

$$\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{l}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{x_0}{l}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{g}}{1+ut} t\right) \quad [\text{Ec. 34}]$$

$$\frac{x}{l} = \text{sen}\left(\text{sen}^{-1}\left(\frac{x_0}{l}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{g}}{1+ut} t\right)\right) \quad [\text{Ec. 35}]$$

$$x(t) = l \cdot \text{sen}\left(\text{sen}^{-1}\left(\frac{x_0}{l}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{g}}{1+ut} t\right)\right) \quad [\text{Ec. 36}]$$

Esta ecuación (Ec. 36) si representaría de forma teórica como varía el desplazamiento horizontal del péndulo simple teniendo en cuenta los efectos de disipación de energía.

Se utilizará el modelo específico encontrado (Ec. 36) para graficar de forma teórica el desplazamiento horizontal, se deben definir algunos parámetros iniciales, los cuales se usarán sólo para observar cómo serían los resultados.

$$g = 9.81 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-2}\text{]}$$

$$l = 0.43 \text{ [m]}$$

$$x_0 = 0.1 [m]$$

$$u = 0.03[s^{-1}]$$

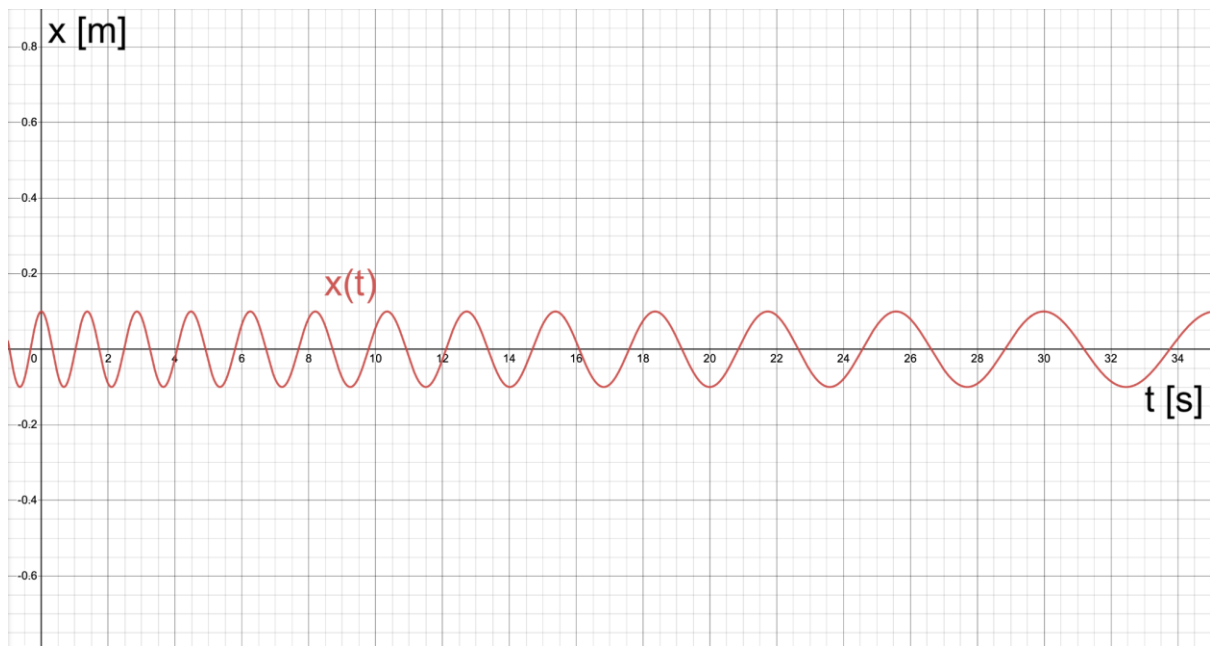


Fig. 4 Gráfico Teórico con datos no reales

Como se observa en el gráfico teórico, se puede interpretar que los resultados tienen cierta coherencia física según la intuición. Después de un tiempo t transcurrido, la frecuencia va disminuyendo, aproximándose con el paso del tiempo t hacia la línea de equilibrio frenando por efectos de disipación de energía.

Experimentación práctica

Los elementos que se utilizarán para la experimentación son los siguientes:

- Emboque chileno (Se compone por dos partes unidas por un hilo, donde la parte grande servirá como péndulo).
- El hilo del péndulo es de 0.43 metros.
- Cámara de video 240 fps (fotogramas por segundo).
- Se empezará a registrar el movimiento del péndulo una vez que éste forme 16° sexagesimales como amplitud angular máxima.

La grabación del péndulo se realizará en condiciones tranquilas en términos del ambiente, no habrá viento ni cambios en la temperatura del aire que podrán afectar

el recorrido del péndulo. Éste tampoco será interferido durante el registro de su movimiento.

El software Tracker retornará una tabla con los datos tiempo v/s desplazamiento (horizontal). Éstos serán colocados en el software Desmos para obtener el gráfico y la regresión de los datos.

Resultados Experimentales

Los resultados experimentales registrados se pueden observar en el siguiente gráfico, donde x representa el desplazamiento horizontal en metros $[m]$ y t el tiempo transcurrido en segundos $[s]$.

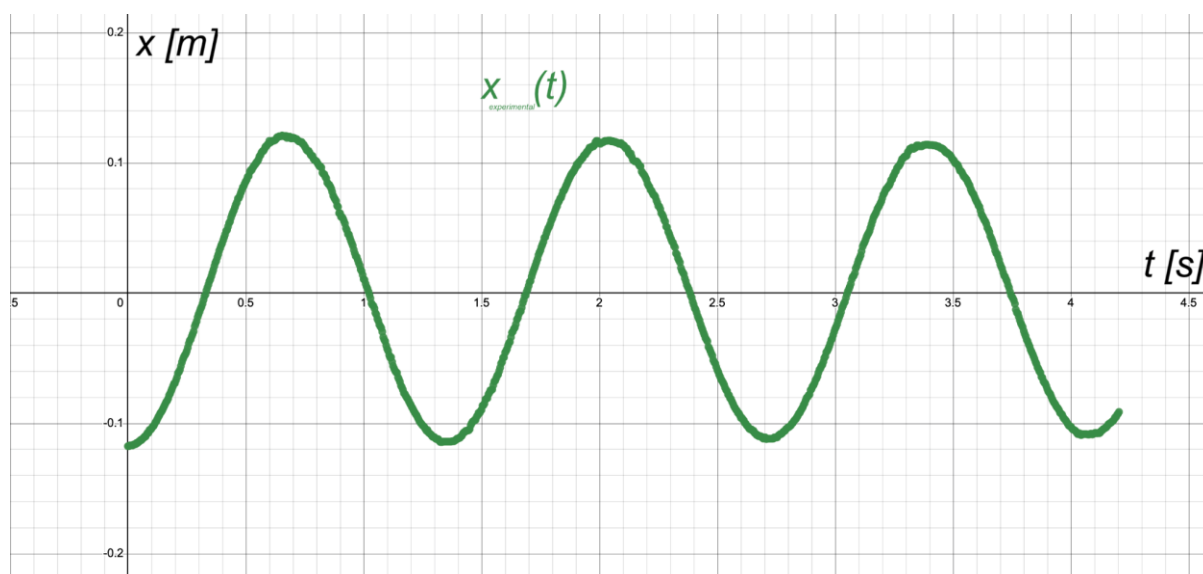


Fig. 5 Gráfico Experimental

La cantidad total de datos registrados en Tracker para luego generar el gráfico (Fig. 5) fue de 1010, obteniendo con ello el movimiento experimental del péndulo hasta el segundo 4.208.

Se puede analizar en el gráfico que el desplazamiento es del tipo sinusoidal, por lo que al aplicar la regresión sinusoidal estadísticamente en base a los datos tomados se obtiene que:

$$y(x) = a \cdot \text{sen}(b(x - c)) + d$$

Donde:

- y representa el desplazamiento horizontal $[m]$

- x el tiempo en [s]
- $a = 0.115588$
- $b = 4.61606$
- $c = 0.335383$
- $d = 0.00290418$

Quedando así:

$$x_{experimental}(t) = 0.115588 \cdot \text{sen}(4.61606 \cdot (t - 0.335383)) + 0.00290418$$

$$R^2 = 0.9994$$

Como se puede observar, la regresión sinusoidal tiene un coeficiente de determinación casi perfecto, por lo que sí se puede utilizar la ecuación de regresión para representar a los datos experimentales y compararla con los datos teóricos obtenidos por el desarrollo de la ecuación diferencial inicial.

Al analizar los datos experimentales en $t = 0$ [s] se puede obtener el desplazamiento máximo inicial, según las condiciones ideales prescritas anteriormente. El desplazamiento máximo inicial x_0 equivale a -0.118 [m]. Y al proponer un valor de $u = 0.004$ [s^{-1}], el modelo teórico describe lo siguiente:

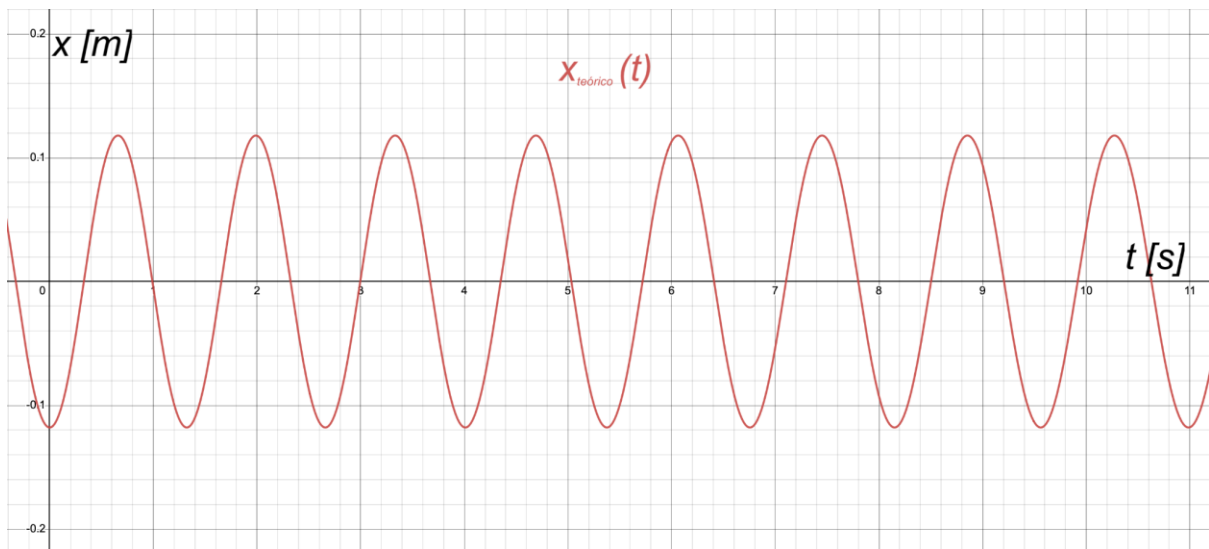


Fig 6. Modelo teórico con parámetros reales

Al colocar los tres gráficos en una imagen se observa lo siguiente:

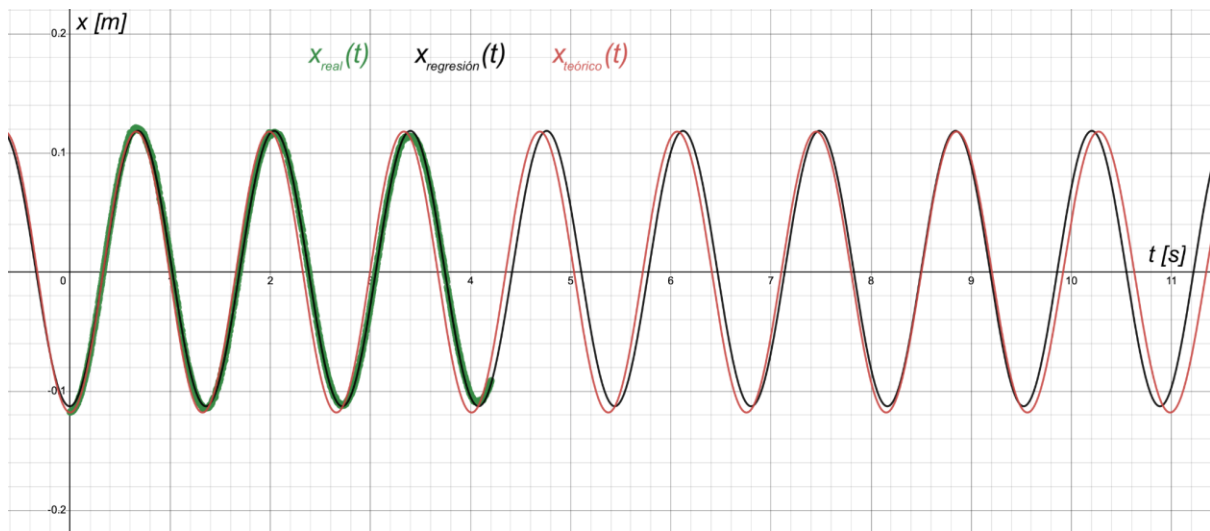


Fig 7. Las tres funciones

Puede observar gráficamente que el modelo teórico coincide con los datos reales, y también con la regresión de éstos hasta antes de $t = 10$ [s]. Los resultados visuales son bastante adecuados, pues después del segundo 10 se observa que la diferencia de fase entre la regresión y la teórica empieza a aumentar, haciéndose más notable. Esto se puede deber a varios factores distintos, entre ellos, las limitaciones asociadas tanto al modelo teórico como a la regresión sinusoidal. En el modelo teórico, una de las limitaciones más influyentes al realizar predicciones a largo plazo es la de asumir que $\sin(\theta) \approx \theta$ para ángulos inferiores a 20° sexagesimales. Para el caso experimental, en el tiempo cero $\theta = 16^\circ = 0.2793$ [rad], el $\sin(0.2793$ [rad]) = 0.2756, por lo que existe una diferencia de $7.87572 \cdot 10^{-9}$ la cual va multiplicando el efecto de desfase con el transcurso del tiempo.

Desde otro punto de vista, existiendo esa limitación para el modelo teórico, aún así la correlación entre los datos es fuerte, incluso, se podría interpretar que el modelo teórico podrá realizar mejores predicciones a largo plazo debido a que éste toma en cuenta los efectos de la disipación de energía a través del tiempo.

Conclusión

Para concluir, se ha logrado demostrar cómo las ecuaciones diferenciales permiten modelar el mundo real, es a través de ellas que se puede modificar parámetros para

obtener el resultado que se busca. Para el caso de esta exploración, se demostró planteando una ecuación diferencial (Ec. 5) que describe el movimiento de un péndulo simple.

También, se desarrolló una segunda ecuación diferencial (Ec. 24) que complementa al resultado de la primera con factores que hacen más realista el modelamiento teórico. Por otro lado, siendo que los resultados fueron los esperados, estos se podrían haber mejorado si no se hubiera realizado la aproximación del ángulo pequeño, pero, los métodos del desarrollo serían diferentes, una alternativa podría ser desarrollar la ecuación diferencial inicial (Ec. 4) mediante soluciones numéricas a través de un lenguaje de programación.

Bibliografía

- *EVAP3: PÉNDULO SIMPLE.* (2019, 31 marzo). Misitio.
<https://aquinovara52.wixsite.com/misitio/post/evap3-pendulo-simple>
- *El Péndulo simple.* (s. f.).
<https://exa.unne.edu.ar/fisica/electymagne/TEORIA/dinamica/trabajo/pendulo/pendulo.htm>