

Bachillerato Internacional

Programa Diploma

Matemáticas: Análisis y Enfoques

Exploración Matemática Nivel Superior

**Modelar la Curva del Contorno del Lago Peñuelas en los
Años 1984 y 2020 para Calcular la Variación de su
Superficie Mediante Métodos Numéricos**

Código de alumno: [REDACTED]

Joaquín Achondo Mercado

Número de páginas: 20

Afirmo ser el autor intelectual de este trabajo y no haber fallado a la probidad



CONSENTIMIENTO

Este trabajo fue cedido por Joaquín Achondo, alumno egresado el año 2024.

Cualquier modificación al mismo, como también cualquier extracción de su contenido o información para ser utilizado en demás trabajos constituye una falta a la probidad académica y se encuentra totalmente prohibida.

Contenido

1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1. MOTIVACIONES.....	1
1.2. OBJETIVOS.....	1
1.2.1. <i>Objetivos específicos:</i>	1
2. MARCO TEÓRICO.....	2
2.1. INTERPOLACIÓN	2
2.2. INTEGRACIÓN DEFINIDA	3
3. DESARROLLO.....	5
3.1. LAGO PEÑUELAS EN 1984	5
3.1.1. <i>Interpolación de Datos Caso 1984</i>	6
3.1.2. <i>Cálculo de Área Caso 1984</i>	9
3.2. LAGO PEÑUELAS EN 2020	13
3.2.1. <i>Interpolación de Datos Caso 2020</i>	13
3.3. COMPARACIÓN DE CASOS	18
4. REFLEXIONES.....	19
REFERENCIAS	20
REFERENCIAS A FIGURAS Y TABLAS	20
ANEXOS.....	21

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Motivaciones

El deporte es un pilar fundamental en mi vida, tanto así que todos los años desde sexto básico he competido en torneos y campeonatos por el colegio. Uno de estos es el Cross Country del ABSCH (Asociación de Colegios Británicos de Chile) que se realiza en las orillas del lago Peñuelas. A lo largo de mis visitas a este lugar, me he podido percatar cómo, producto de sequias, este ha disminuido considerablemente su tamaño. Además, mi mamá me contaba que en ese mismo lago fue donde ella aprendió a pescar con su papá, mi abuelo. Es por esto que en mi exploración matemática quiero estudiar cómo el cambio climático ha afectado a esta reserva nacional. Así, vincular mi trabajo con una problemática interesante que se conecta con un lugar que es de suma importancia para mí donde he vivido experiencias muy alegres e inolvidables.

1.2. Objetivos

El objetivo general de mi evaluación interna es modelar la curva del contorno del lago Peñuelas en los años 1984 y 2020 para calcular la variación de su superficie mediante análisis numérico. Así, mostrar el efecto del cambio climático en mi entorno, De esta manera, podré analizar y estudiar un tópico contingente que me llame la atención, pero más importante, que me permita ampliar mi conocimiento y comprensión matemática y llegar a la universidad con una base importante. Cabe destacar que se utilizará el año 2020 como referencia de la actualidad del lago debido a que en este último tiempo este está casi completamente seco.

1.2.1. Objetivos específicos:

- Interpolar uno o varios polinomios entre puntos estratégicos de la figura del lago que aproximen su forma (se realiza en ambos periodos analizados).
- Integrar los polinomios hallados para así calcular el área del lago en los períodos.
- Comparar las áreas resultantes y analizar el impacto medioambiental del cambio climático en el mundo y mi entorno.

2. MARCO TEÓRICO

En esta investigación matemática se utilizan conceptos y métodos que no se estudian en el programa IB matemáticas: análisis y enfoque. Por esta razón, es pertinente definir y explicar los métodos que se usan para así proporcionar una buena contextualización y base para comprender lo estudiado.

2.1. Interpolación

El concepto interpolar se define como: dados los $n + 1$ pares $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ se halla una función $g(x)$ que pase por todos los puntos, tal que:

$$g(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Con esto de base, existen variados métodos de interpolación. Como, por ejemplo, la interpolación con base de Lagrange, con base de Newton, etc. donde cada uno se diferencia en la forma en que adopta esta función g . Debido a la compleja figura del lago a estudiar, se modelará la curva del contorno del lago mediante funciones por tramos que aproximan la forma de este. Así, para lograrlo, se interpolan los datos de cada tramo a través de polinomios de grado k a través de interpolación de Lagrange. Notar que, para encontrar los coeficientes de estos polinomios, se tiene que resolver un sistema lineal de $k + 1$ ecuaciones, en donde $(k + 1)$ corresponde a los puntos a interpolar en cada tramo. En este sentido, para cada tramo del lago, se halla un polinomio de grado k . Tal que:

$$P(x) = \sum_{i=0}^k \lambda_i x^k$$

Donde λ corresponde a los coeficientes desconocidos del polinomio. Es decir:

$$P(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_k x^k$$

Para encontrar los coeficientes, se forma un sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} P(x_0) = y_0 \\ P(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ P(x_k) = y_k \end{cases}$$

Para hacer más sencillo tal sistema de ecuaciones, este puede ser expresado en forma matricial de manera que:

$$A\lambda = y$$

Siendo A la matriz y λ el vector de los coeficientes desconocidos que se expresan como:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^k \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \cdots & x_k^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

Así, el sistema se puede resolver fácilmente para encontrar los coeficientes λ_i del polinomio. Cabe destacar que, para la exploración, se toman puntos estratégicos del lago, los cuales están colocados en zonas de este que permitan modelar el contorno con precisión (por ejemplo en una parte del lago donde haya una curva), en ambos periodos de tiempo para así interpolarlos y hallar funciones por tramos que modelen la curva del contorno de estos.

2.2. Integración Definida

Una integral definida se puede explicar cómo: "Si f es una función continua definida para $a \leq x \leq b$, se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sean $x_0 (= a), x_1, x_2, \dots, x_n (= b)$ los puntos extremos de estos subintervalos y sean $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ los puntos muestra en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la integral definida de f , desde a hasta b , es" (Stewart, 2012):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

En este sentido, las integrales son un método utilizado para calcular el área bajo la curva de una función, tal que:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Siendo A el área bajo la curva.

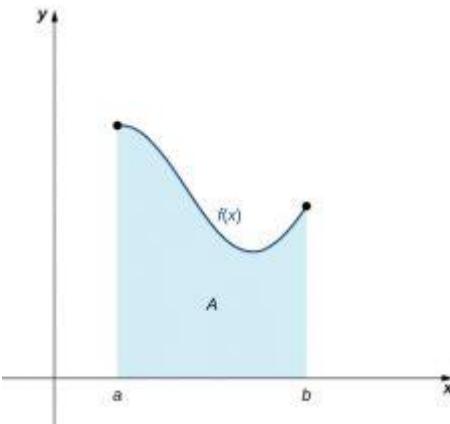


Figura 1: representación de integral definida sobre $[a,b]$

Con esto en mente, se destacan diversas propiedades y teoremas de las integrales. Siendo el teorema fundamental del cálculo uno de estos, el cual cumple un rol clave en la exploración. En este sentido, este teorema se define como:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Donde F es una antiderivada de f ; es decir, una función tal que $F' = f$. De esta manera, una antiderivada de polinomios se expresa como:

$$F(x) = \int \sum_i \lambda_i x^i dx = \sum_i \frac{\lambda_i x^{i+1}}{i+1} + C$$

Esto se utiliza en la exploración para poder integrar los polinomios hallados y calcular el área del lago tanto en 1984 y 2020 para así evidenciar y mostrar el efecto del cambio climático en la V región de Chile, mi entorno.

3. DESARROLLO

A lo largo de los años, el lago Peñuelas, un lugar icónico de mi región, se ha visto perjudicado por las grandes sequias que han ocurrido en estos últimos 40 años. Esto se evidencia en la siguiente figura que compara la condición del lago en los años 1984 y 2020.



Figura 2: comparación estado del lago en los años 1984 (izquierda) y 2020 (derecha)

De esta manera, se quiere calcular la variación de la superficie del lago a través de los años y así mostrar el efecto del cambio climático. Para esto, se debe modelar el contorno del lago en los dos períodos a estudiar.

3.1. Lago Peñuelas en 1984

Para modelar el contorno de la curva del lago en este periodo, se toman en cuenta 84 puntos estratégicos (anexo 1) de manera que aproximen la forma de este.



Figura 3: 84 puntos estratégicos que modelan el contorno del lago en 1984 (elaboración propia en Geogebra)

Debido a que no se puede hallar una sola función que modele el contorno, ya que en ciertos puntos deja de ser función, se hallan 14 funciones por tramos para lograrlo. Siendo expresado como:

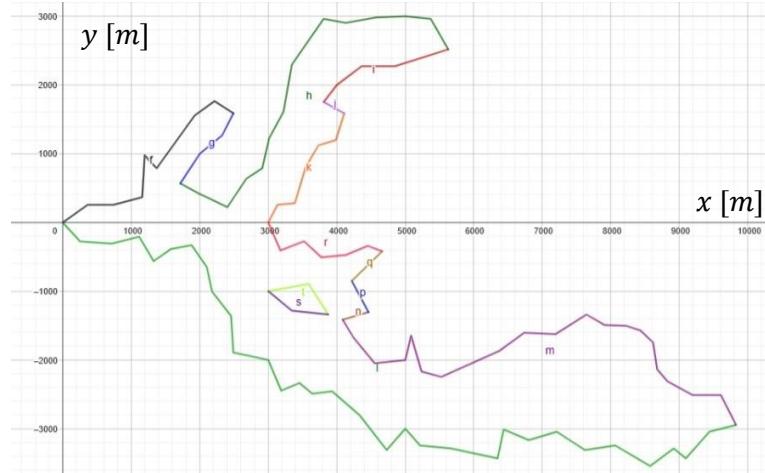


Figura 4: tramos del lago peñuelas en 1984 (elaboración propia en Geogebra)

Cabe destacar que ciertos puntos se repiten en los tramos dado a que estos son continuos, es decir que el último punto por donde pasa el primer tramo también pasa el segundo tramo. A partir de esto, se establece que cada polinomio es de grado k , siendo $k + 1$ la cantidad de puntos del tramo.

Un problema para considerar es que, al interpolar los puntos de cada tramo se encuentra un polinomio de alto grado, este sufre de grandes oscilaciones. Esto quiere decir que tal función pasa por los puntos equiespaciados, pero no representa la figura a modelar. Como solución de esta desventaja, se interpolan los puntos por tramos más cortos que permitan modelar con precisión el contorno del lago, así, se hallan 27 funciones polinómicas y no 14.

3.1.1. Interpolación de Datos Caso 1984

Con esto en mente, para cada tramo se crea una matriz $(k + 1) \times (k + 1)$, donde $(k + 1)$ es la cantidad de puntos del tramo, que permite hallar los coeficientes del polinomio de grado k . Para evitar repetir el mismo procedimiento varias veces, solo se muestran las interpolaciones de los tramos 1, 5 y 22. Cabe destacar que se realiza el mismo paso a paso para cada función.

Tramo 1: Con los puntos al pertenecientes al tramo 1 se construye una matriz $((k+1)(k+1))$

y se resuelve un sistema de ecuaciones a partir de un código en Python¹ (anexo 3).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,000 & 0,000^2 & 0,000^3 \\ 1 & 0,739 & 0,739^2 & 0,739^3 \\ 1 & 1,161 & 1,161^2 & 1,161^3 \\ 1 & 1,371 & 1,371^2 & 1,371^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,257 \\ 0,368 \\ 0,789 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 0,000 \\ \lambda_1 = 2,1720 \\ \lambda_2 = -3,9934 \\ \lambda_3 = 2,0634 \end{cases}$$

Con tales resultados se expresa la función polinómica de la siguiente manera.

$$T_1(x) = 2,0634x^3 - 3,9934x^2 + 2,1720x, \quad 0 \leq x \leq 1,371$$

Tramo 5:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2,912 & 2,912^2 & 2,912^3 & 2,912^4 & 2,912^5 & 2,912^6 & 2,912^7 \\ 1 & 3,011 & 3,011^2 & 3,011^3 & 3,011^4 & 3,011^5 & 3,011^6 & 3,011^7 \\ 1 & 3,344 & 3,344^2 & 3,344^3 & 3,344^4 & 3,344^5 & 3,344^6 & 3,344^7 \\ 1 & 3,809 & 3,809^2 & 3,809^3 & 3,809^4 & 3,809^5 & 3,809^6 & 3,809^7 \\ 1 & 4,131 & 4,131^2 & 4,131^3 & 4,131^4 & 4,131^5 & 4,131^6 & 4,131^7 \\ 1 & 5,000 & 5,000^2 & 5,000^3 & 5,000^4 & 5,000^5 & 5,000^6 & 5,000^7 \\ 1 & 5,372 & 5,372^2 & 5,372^3 & 5,372^4 & 5,372^5 & 5,372^6 & 5,372^7 \\ 1 & 5,627 & 5,627^2 & 5,627^3 & 5,627^4 & 5,627^5 & 5,627^6 & 5,627^7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,789 \\ 1,222 \\ 2,297 \\ 2,962 \\ 2,906 \\ 3,000 \\ 2,962 \\ 2,518 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = -4047,8346 \\ \lambda_1 = 7240,0787 \\ \lambda_2 = -5510,5893 \\ \lambda_3 = 2308,0777 \\ \lambda_4 = -573,4433 \\ \lambda_5 = 84,4211 \\ \lambda_6 = -6,8154 \\ \lambda_7 = 0,2327 \end{cases}$$

$$T_5(x) = -4047,835 + 7240,079x - 5510,589x^2 + 2308,078x^3 - 573,443x^4 + 84,4211x^5$$

$$- 6,815x^6 + 0,233x^7, \quad 2,912 \leq x \leq 5,627$$

Tramo 22: Desde el punto H_1 , las coordenadas del eje y son negativas. Sin embargo, para facilitar el cálculo de áreas que se explicará más adelante, se consideran positivas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3,931 & 3,931^2 & 3,931^3 & 3,931^4 \\ 1 & 3,643 & 3,643^2 & 3,643^3 & 3,643^4 \\ 1 & 3,455 & 3,455^2 & 3,455^3 & 3,455^4 \\ 1 & 3,189 & 3,189^2 & 3,189^3 & 3,189^4 \\ 1 & 3,000 & 3,000^2 & 3,000^3 & 3,000^4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,457 \\ 2,490 \\ 2,335 \\ 2,446 \\ 2,000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = -3116,3865 \\ \lambda_1 = 3612,0233 \\ \lambda_2 = -1564,7353 \\ \lambda_3 = 300,4710 \\ \lambda_4 = -21,5799 \end{cases}$$

$$T_{22}(x) = -3116,387 + 3612,023x - 1564,735x^2 + 300,471x^3 - 21,580x^4, \quad 3 \leq x \leq 3,931$$

Así, los 27 polinomios se expresan de la siguiente manera:

¹ Python es un lenguaje de programación que se caracteriza por su versátil para la computación científica. Se utiliza en esta exploración para resolver ecuaciones los cuales no son factibles hacerlos a mano por su gran tamaño.

Tabla 1: Coeficientes de los polinomios de los tramos interpolados.

Coeficientes de tramos ²									
T_i	k	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
1	3	0	2,172	-3,993	2,063	-	-	-	-
2	3	5,550	- 10,854	7,423	- 1,487	-	-	-	-
3	3	-41,037	58,862	- 27,727	4,402	-	-	-	-
4	4	-166,871	305,944	- 205,995	60,519	6,548	-	-	-
5	7	-4047,835	7240,079	- 5510,589	2308,078	- 573,443	84,421	6,815	0,233
6	4	88,368	- 92,836	35,451	- 5,787	0,344	-	-	-
7	1	3,874	- 0,557	-	-	-	-	-	-
8	6	-191189,725	320553,322	- 223191,874	82606,604	- 17141,338	1890,866	86,630	-
9	3	-371,711	328,432	- 96,408	9,411	-	-	-	-
10	3	78,786	- 56,347	13,487	- 1,074	-	-	-	-
11	3	2233,123	- 1524,929	347,119	- 26,330	-	-	-	-
12	3	1465,986	- 1301,999	430,936	- 62,938	-	-	-	-
13	2	52,894	- 16,729	1,369	-	-	-	-	-
14	4	5669,905	- 3194,832	674,111	- 63,104	3,423	-	-	-
15	2	148,969	- 36,084	2,205	-	-	-	-	-
16	3	-2428,500	785,731	- 84,627	3,037	-	-	-	-
17	4	52228,156	- 22597,713	3662,182	263,433	7,097	-	-	-
18	3	-608,191	233,166	- 29,610	1,252	-	-	-	-
19	2	-40,393	12,724	- 0,929	-	-	-	-	-
20	3	-14,771	6,309	- 0,551	-	-	-	-	-
21	2	-40,226	18,995	- 2,070	-	-	-	-	-
22	4	-3116,387	3612,023	- 1564,735	300,478	21,580	-	-	-
23	2	-30,503	23,632	- 4,266	-	-	-	-	-
24	4	-40,758	94,511	- 78,333	27,678	3,494	-	-	-
25	2	0	0,864	- 0,608	-	-	-	-	-
26	2	-9,642	5,994	- 0,815	-	-	-	-	-
27	2	22,699	- 13,130	1,966	-	-	-	-	-

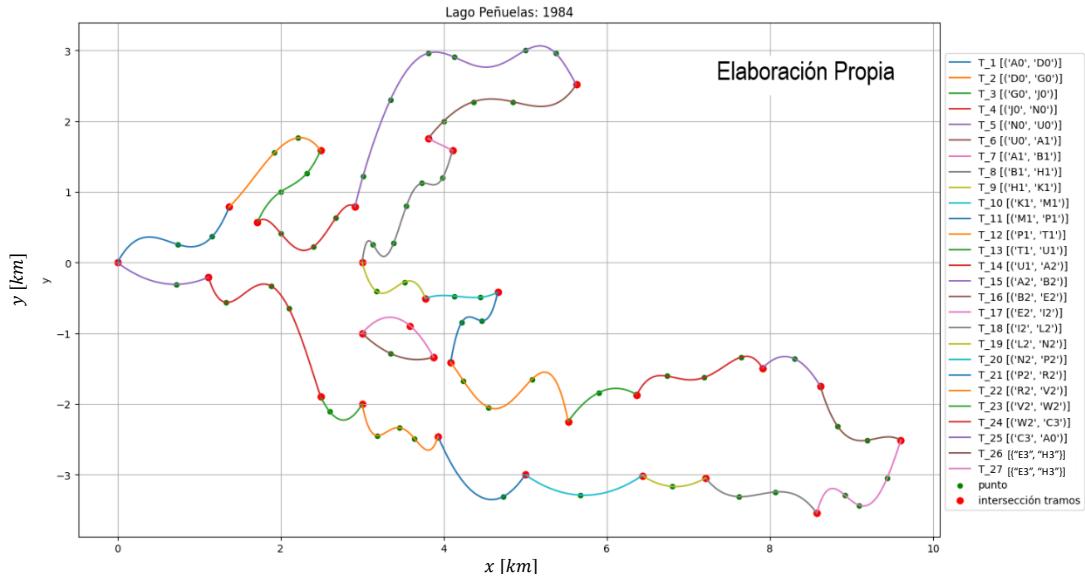


Figura 5: Polinomios que modelan lago peñuelas en 1984

² Coeficientes calculados a través de código de Python (anexo 3), decimales completos de los coeficientes (anexo 4).

3.1.2. Cálculo de Área Caso 1984

Para facilitar el cálculo de las áreas, los polinomios encontrados se dividen en los cuadrantes I y IV. Esto porque así se evita un cálculo de áreas entre curvas tedioso. Resultando:

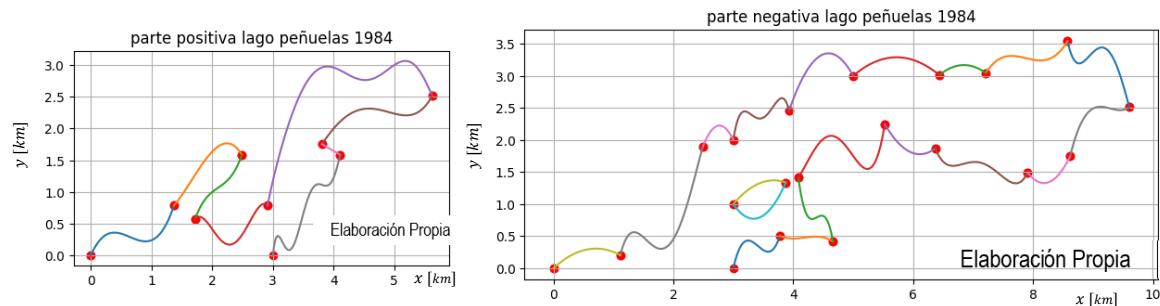


Figura 6: Modelo del lago 1984 separado en el cuadrante I (parte positiva) y IV (parte negativa)

Así, como visto en la figura 2.5, los polinomios del lago Peñuelas es cortado en el eje x donde del tramo 1 al 8 permanecen en el cuadrante I y del tramo 9 al 27 en el cuadrante IV respectivamente.

Además, como se evidencia en la figura 2.5, se debe realizar un juego de cálculo de áreas entre curvas. Tal que se pueda conocer la superficie del lago con precisión. Con la siguiente figura se visualiza claramente cuales tramos suman al área total del cuadrante y cuales restan respectivamente.

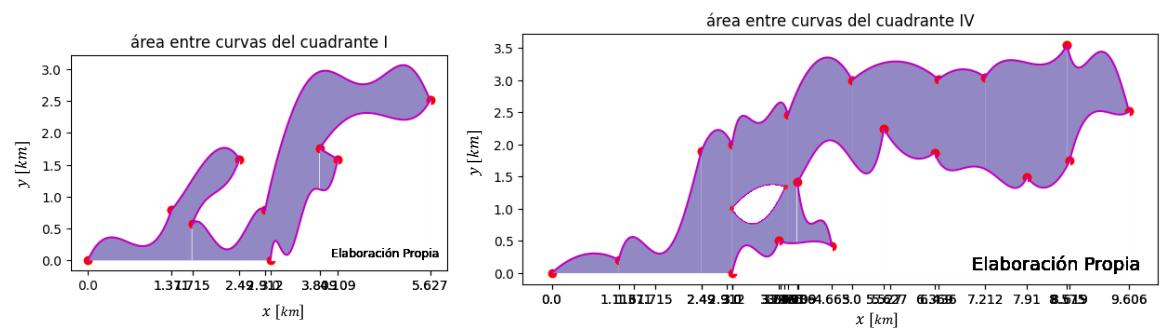


Figura 7: Representación de las áreas del lago 1984, dividido en los cuadrantes correspondientes

De esta manera, el cálculo de áreas de los cuadrantes es representado de la forma.

$$A_{cuadrante\ I} = \left(\int_{A_0}^{D_0} T_1(x)dx + \int_{D_0}^{G_0} T_2(x)dx + \int_{J_0}^{N_0} T_4(x)dx + \int_{N_0}^{U_0} T_5(x)dx + \int_{A_1}^{B_1} T_7(x)dx \right) \\ - \left(\int_{G_0}^{J_0} T_3(x)dx + \int_{U_0}^{A_1} T_6(x)dx + \int_{B_1}^{H_1} T_8(x)dx \right)$$

$$A_{Cuadrante\ IV} = \left(\int_{M_1}^{P_1} T_{11}(x)dx + \int_{E_2}^{I_2} T_{17}(x)dx + \int_{I_2}^{L_2} T_{18}(x)dx + \int_{L_2}^{N_2} T_{19}(x)dx + \int_{N_2}^{P_2} T_{20}(x)dx + \int_{P_2}^{R_2} T_{21}(x)dx \right. \\ \left. + \int_{R_2}^{V_2} T_{22}(x)dx + \int_{V_2}^{W_2} T_{23}(x)dx + \int_{W_2}^{C_3} T_{24}(x)dx + \int_{C_3}^{A_0} T_{25}(x)dx + \int_{E_3}^{H_3} T_{27}(x)dx \right) \\ - \left(\int_{H_1}^{K_1} T_9(x)dx + \int_{K_1}^{M_1} T_{10}(x)dx + \int_{P_1}^{T_1} T_{12}(x)dx + \int_{T_1}^{U_1} T_{13}(x)dx + \int_{U_1}^{A_2} T_{14}(x)dx \right. \\ \left. + \int_{A_2}^{B_2} T_{15}(x)dx + \int_{B_2}^{E_2} T_{16}(x)dx + \int_{E_2}^{H_3} T_{26}(x)dx \right)$$

Como se visualiza en las expresiones, para conocer el área del lago en cada cuadrante se debe integrar cada polinomio. A modo de ejemplo se muestra la integración del tramo 1. Sin embargo, al ser una gran cantidad de funciones, para evitar un procedimiento repetitivo se integra con un código de Python que utiliza el teorema fundamental del cálculo (anexo 3).

$$\int_{A_0}^{D_0} T_1(x)dx = \int_0^{1,371} (2,172x - 3,993x^2 + 2,063x^3)dx = 1,086x^2 - 1,331x^3 + 0,516x^4 \Big|_0^{1,371}$$

Tabla 2: Coeficientes de las integrales de los tramos interpolados

Coeficientes de las integrales de los tramos ³											
T_i	K^*	λ_1^*	$\lambda_2^*(x^2)$	λ_3^*	λ_4^*	λ_5^*	λ_6^*	λ_7^*	λ_8^*	a	b
1	4	0	1,086	- 1,331	0,516	-	-	-	-	0	1,371
2	4	5,550	- 5,427	2,474	- 0,372	-	-	-	-	1,371	2,490
3	4	- 41,037	29,431	- 9,242	1,101	-	-	-	-	1,715	2,490
4	5	- 166,871	152,972	- 68,665	15,130	- 1,310	-	-	-	1,715	2,912
5	8	- 4047,835	3620,039	- 1836,863	577,019	- 114,689	14,070	- 0,974	0,029	2,912	5,627
6	5	88,369	- 46,418	11,817	- 1,447	0,069	-	-	-	3,809	5,627
7	2	3,874	- 0,278	-	-	-	-	-	-	3,809	4,109
8	7	-191189,725	160276,661	- 74397,291	20651,651	- 3428,268	315,144	- 12,376	-	3,000	4,109
9	4	- 371,711	164,216	- 32,136	2,353	-	-	-	-	3,000	3,776
10	4	78,786	- 28,173	4,496	- 0,269	-	-	-	-	3,776	4,663
11	4	2233,123	- 762,464	115,706	- 6,582	-	-	-	-	4,086	4,663
12	5	1465,986	- 650,999	143,645	- 15,735	0,685	-	-	-	4,086	5,527
13	3	52,894	- 8,364	0,456	-	-	-	-	-	5,527	6,369
14	5	5669,905	- 1597,416	224,704	- 15,776	0,442	-	-	-	6,369	7,910
15	3	148,969	- 18,042	0,735	-	-	-	-	-	7,910	8,619
16	4	- 2428,500	392,865	- 28,209	0,759	-	-	-	-	8,619	9,606
17	5	52228,156	- 11298,856	1220,728	- 65,858	1,419	-	-	-	8,575	9,606
18	4	- 608,191	116,583	- 9,870	0,313	-	-	-	-	7,212	8,575
19	3	- 40,393	6,362	- 0,310	-	-	-	-	-	6,436	7,212
20	3	- 14,771	3,155	- 0,184	-	-	-	-	-	5,000	6,436
21	3	- 40,226	9,498	- 0,690	-	-	-	-	-	3,931	5,000
22	5	- 3116,387	1806,012	- 521,578	75,120	- 4,316	-	-	-	3,000	3,931
23	3	- 30,503	11,816	- 1,422	-	-	-	-	-	2,490	3,000
24	5	- 40,758	47,256	- 26,111	6,912	- 0,699	-	-	-	1,116	2,490
25	3	0	0,432	- 0,203	-	-	-	-	-	0	1,116
26	3	- 9,642	2,997	- 0,272	-	-	-	-	-	3,000	3,876
27	3	22,699	- 6,565	0,655	-	-	-	-	-	3,000	3,876

³ Decimales completos de los coeficientes en anexo 4.

Con esto en mente, para conocer el área de cada polinomio se debe evaluar su integral en el punto máximo y restarlo con su punto mínimo. A modo de ejemplo se muestra el procedimiento de este cálculo con el tramo 1.

$$\begin{aligned}
 A_{T_1} &= \int_{A_0}^{D_0} T_1(x) dx = \int_0^{1,371} (2,172x - 3,993x^2 + 2,063x^3) dx \\
 &= 1,086x^2 - 1,331x^3 + 0,516x^4 \Big|_0^{1,371} \\
 &= (1,086(1,371)^2 - 1,331(1,371)^3 + 0,516(1,371)^4 + C) \\
 &\quad - (1,086(0)^2 - 1,331(0)^3 + 0,516(0)^4 + C) = (0,4335 + C) - C \approx 0,4335
 \end{aligned}$$

Esto se realiza con cada polinomio. Sin embargo, para ahorrar tiempo y evitar un tedioso cálculo, al igual que la integración de los polinomios, el área de cada tramo se obtiene a partir de un código de Python (anexo 3). Tales resultados se expresan en la siguiente tabla:

Tabla 3: Áreas de cada tramo

Áreas de los Tramos, lago 1984 ⁴					
Tramo (T_i)	Área resultante	Tramo (T_i)	Área resultante	Tramo (T_i)	Área resultante
1	0,4335	10	0,4222	19	2,4217
2	1,6072	11	0,4781	20	4,5878
3	0,8318	12	2,6042	21	3,3382
4	0,5454	13	1,5966	22	2,2676
5	7,2138	14	2,3912	23	1,0867
6	4,0284	15	1,0179	24	0,9016
7	0,5011	16	2,3579	25	0,2564
8	0,7986	17	3,3289	26	1,1154
9	0,2552	18	4,4707	27	0,8038

En la tabla recién presentada, se visualiza el área de cada tramo. Por lo que, considerando las expresiones anteriormente señaladas para el cálculo del área total de cada cuadrante, la superficie del lago peñuelas en el año 1984 es:

⁴ Datos truncados al cuarto decimal. Tabla con decimales completos en anexo 4.

$$A_{cuadrante \text{ I}} = (0,4335 + 1,6072 + 0,5454 + 7,2138 + 0,5011) - (0,8318 + 4,0284 + 0,7986) = (10,3012) - (5,6589) = 4,6422$$

$$A_{cuadrante \text{ IV}} = (0,4781 + 3,3289 + 4,4707 + 2,4217 + 4,5878 + 3,3382 + 2,2676 + 1,0867 + 0,9016 + 0,2564 + 0,8038) - (0,2552 + 0,4222 + 2,6042 + 1,5966 + 2,3912 + 1,0179 + 2,3579 + 1,1154) = (23,9419) - (11,7609) = 12,1809$$

$$A_{total \text{ 1984}} = A_{cuadrante \text{ I}} + A_{cuadrante \text{ IV}} = 4,6422 + 12,1809 = 16,8232117707863$$

Como se visualiza, el resultado obtenido es aproximadamente 16,8232. Sin embargo, este resultado no representa la superficie real del lago en 1984. Esto porque la escala en que se realizó es 1:1000 metros, por lo que el valor del cálculo se debe multiplicar por $1 \cdot 10^6$. Mostrando así que el área del lago Peñuelas en el año 1984 era de aproximadamente $16823211,7707863 m^2$ o $16,823 km^2$.

Este resultado es bastante acertado al compararlo con la siguiente figura que expresa una idea de la superficie que debiese haber resultado. Además, se debe considerar un posible gran grado de error debido a la gran escala en que se realizan los cálculos y al considerar que los 84 puntos estratégicos fueron elegidos a mano alzada.

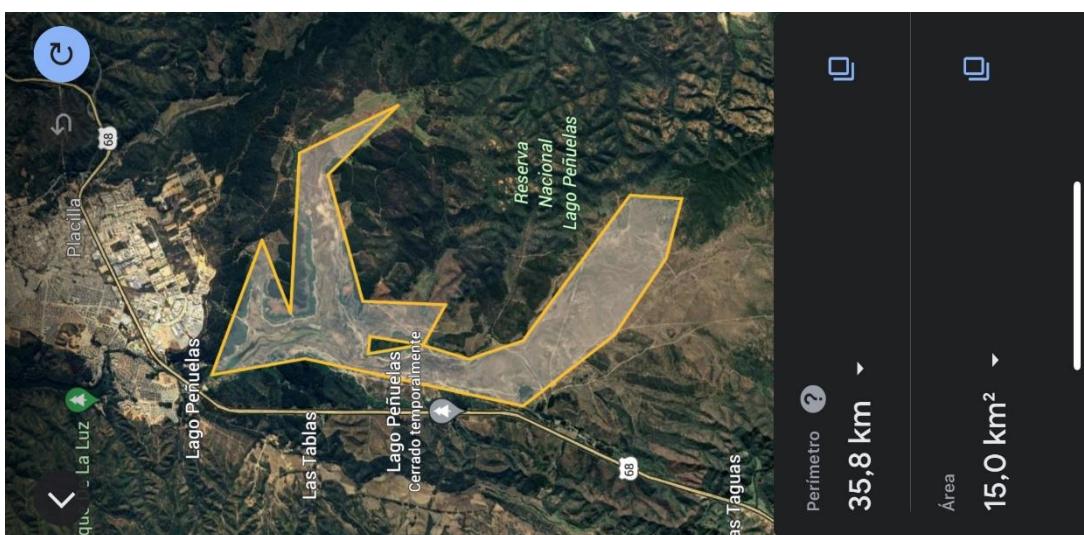


Figura 8: Captura de pantalla de Google Earth que señala estimación del valor a conseguir

3.2. Lago Peñuelas en 2020

De la misma manera que con el procedimiento del lago en 1984, en este se toman en cuenta 21 puntos estratégicos (anexo 2) que modelan la forma de este. Estos son representados en la siguiente figura.

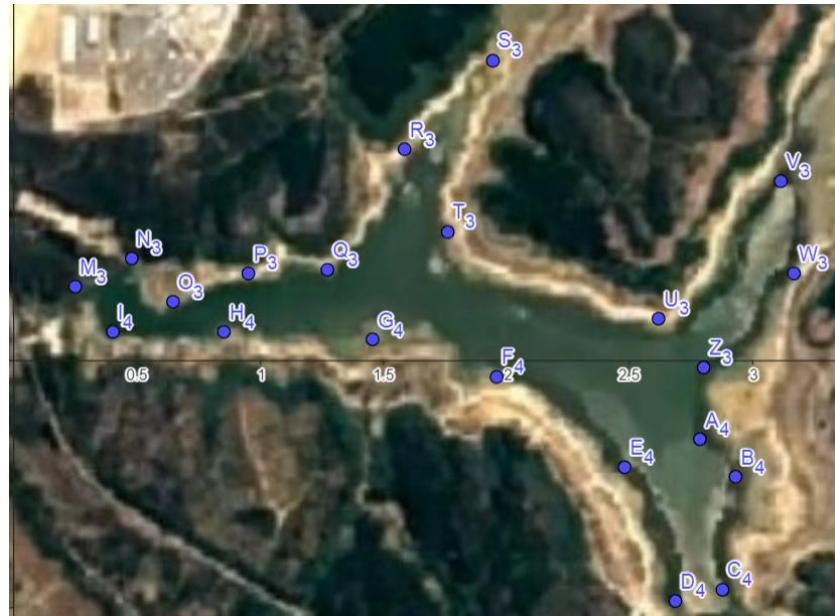


Figura 9: 21 puntos estratégicos que representan la forma del lago (elaboración propia en Geogebra)

3.2.1. Interpolación de Datos Caso 2020

Con esto en mente, se interpolan tales puntos para así hallar 12 funciones polinómicas que representan el contorno del lago Peñuelas en 2020. Esto se realiza a través de un sistema de ecuaciones que se puede resolver con matrices (anexo 3). A modo de ejemplo se muestra el procedimiento para hallar el segundo tramo, donde se construye una matriz $((k + 1)(k + 1))$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,248 & 0,248^2 & 0,248^3 & 0,248^4 \\ 1 & 0,477 & 0,477^2 & 0,477^3 & 0,477^4 \\ 1 & 0,645 & 0,645^2 & 0,645^3 & 0,645^4 \\ 1 & 0,951 & 0,951^2 & 0,951^3 & 0,951^4 \\ 1 & 1,272 & 1,272^2 & 1,272^3 & 1,272^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,301 \\ 0,416 \\ 0,240 \\ 0,354 \\ 0,370 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = -2,0435 \\ \lambda_1 = 17,8902 \\ \lambda_2 = -43,6065 \\ \lambda_3 = 42,0824 \\ \lambda_4 = -13,9035 \end{cases}$$

$$T_2(x) = -2,0435 + 17,8902x - 43,6065x^2 + 42,0824x^3 - 13,9035x^4$$

De este modo, los demás polinomios se representan a través de la siguiente tabla.

Tabla 4: Coeficientes de los polinomios interpolados (lago 2020)

Coeficientes de los polinomios hallados ⁵					
T_i	K	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3
1	3	0,861	- 3,029	3,408	- 1,191
2	4	-2,044	17,890	- 43,607	42,082
3	2	-3,298	3,945	- 0,834	-
4	1	-6,154	3,792	-	-
5	1	1,246	- 0,411	-	-
6	1	-2,767	1,123	-	-
7	1	22,520	- 7,000	-	-
8	1	-2,706	0,966	-	-
9	1	58,254	- 20,806	-	-
10	1	-2,613	1,053	-	-
11	2	-261,580	189,288	- 34,079	-
12	3	-10,589	17,426	- 9,445	1,698

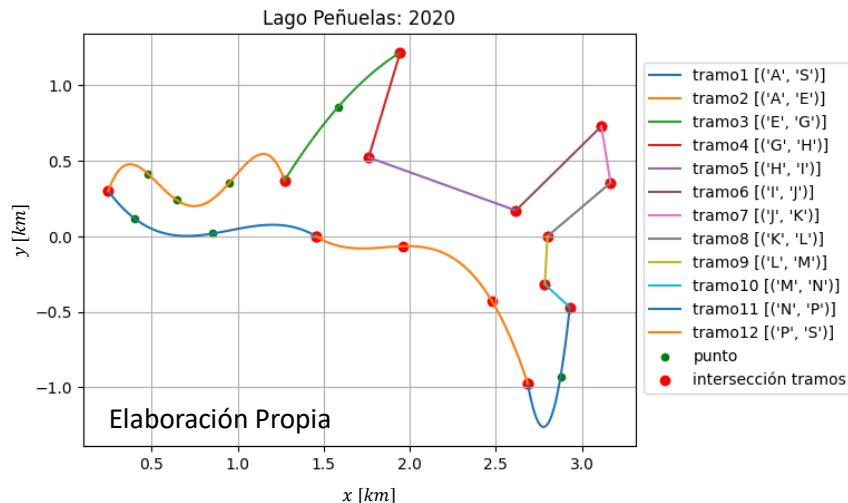


Figura 10: Polinomios que representan el contorno del lago en 2020

3.2.2. Cálculo de Área Caso 2020

Al igual que en el primer periodo estudiado, para facilitar el cálculo de áreas, la figura encontrada es cortada en el eje x separando el lago en el cuadrante I y el cuadrante IV respectivamente, esto se representa en la siguiente figura. Cabe destacar que los polinomios presentados anteriormente representan esta situación, por lo que la figura 2.9 muestra que desde el tramo 9, se grafica la función invertida, es decir, $(-T_i(x))$. Esto también se aplica para el caso de 1984.

⁵ Decimales completos de los coeficientes en anexo 5.

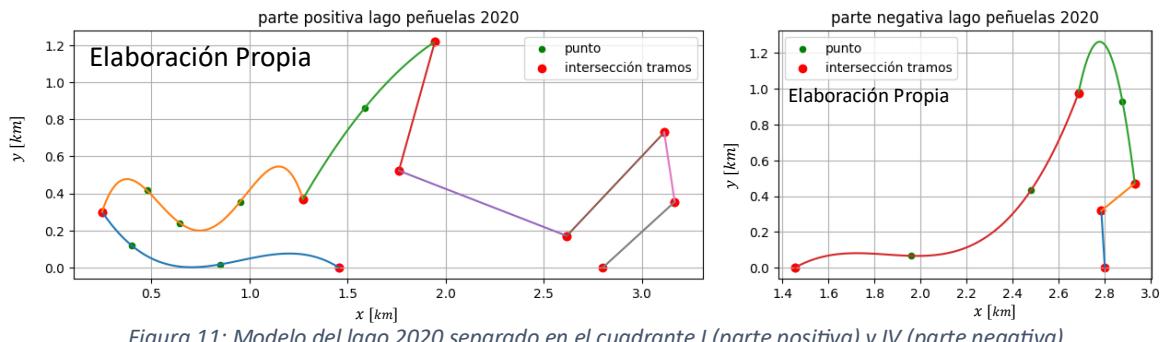


Figura 11: Modelo del lago 2020 separado en el cuadrante I (parte positiva) y IV (parte negativa)

Así, se debe calcular la superficie dentro de los polinomios. Para lograr esto, se genera una especie de área entre curvas representada de la siguiente manera.

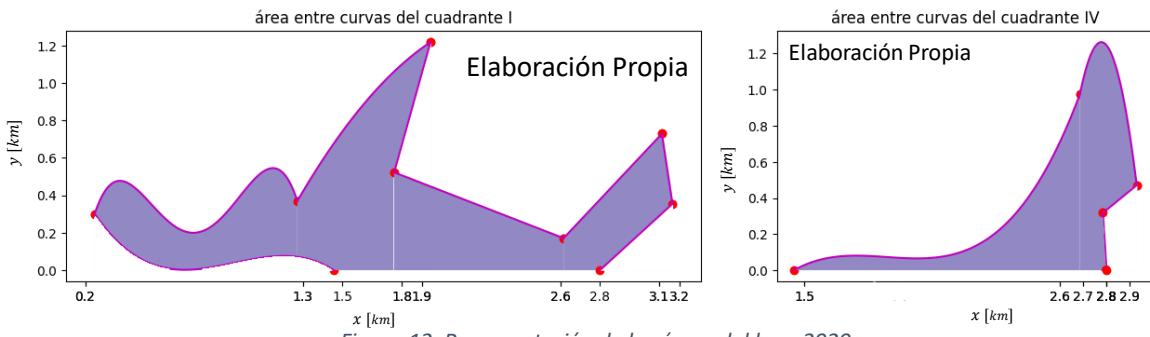


Figura 12: Representación de las áreas del lago 2020

A partir de esto, se muestra cual es la expresión para conocer el área del lago en cada cuadrante. Tales expresiones se presentan de la siguiente forma.

$$A_{cuadrante\ I} = \left(\int_A^E T_2(x)dx + \int_E^G T_3(x)dx + \int_H^I T_5(x)dx + \int_I^J T_6(x)dx + \int_J^K T_7(x)dx \right)$$

$$- \left(\int_A^S T_1(x)dx + \int_G^H T_4(x)dx + \int_K^L T_8(x)dx \right)$$

$$A_{cuadrante\ IV} = \left(\int_L^M T_9(x)dx + \int_N^P T_{11}(x)dx + \int_P^S T_{12}(x)dx \right) - \left(\int_M^N T_{10}(x)dx \right)$$

Al visualizar tales expresiones, se indica que las funciones polinómicas deben ser integradas para poder calcular la superficie del lago. A continuación, se muestra el procedimiento del tramo 2. Los demás tramos son integrados a partir de un código en Python (anexo 3) y son presentados en la tabla que va después del procedimiento.

$$\int_A^E T_2(x)dx = \int_{0,248}^{1,272} (-2,0435 + 17,8902x - 43,6065x^2 + 42,0824x^3 - 13,9035x^4)dx$$

$$= -2,0435x + 8,9451x^2 - 14,5355x^3 + 10,5206x^4 - 2,7807x^5 \Big|_{0,248}^{1,272}$$

Tabla 5: Coeficientes de las integrales de los polinomios

Coeficientes de las integrales de los tramos ⁶								
T_i	K^*	λ_1^*	$\lambda_2^*(x^2)$	λ_3^*	λ_4^*	λ_5^*	a	b
1	4	0,861	- 1,514	1,136	- 0,298	-	0,248	1,455
2	5	-2,044	8,945	-14,536	10,521	-2,781	0,248	1,272
3	3	-3,298	1,972	- 0,278	-	-	1,272	1,944
4	2	-6,154	1,896	-	-	-	1,761	1,944
5	2	1,246	- 0,205	-	-	-	1,761	2,616
6	2	-2,767	0,562	-	-	-	2,616	3,113
7	2	22,520	- 3,500	-	-	-	3,113	3,167
8	2	-2,706	0,483	-	-	-	2,800	3,167
9	2	58,254	- 10,403	-	-	-	2,785	2,800
10	2	-2,613	0,526	-	-	-	2,785	2,930
11	3	-261,580	94,644	- 11,360	-	-	2,685	2,930
12	4	-10,589	8,713	- 3,148	0,424	-	1,455	2,685

A partir de la tabla recién presentada, se calcula la integral definida de cada tramo. Esto se realiza, al igual que en el caso de 1984, a partir de un código en Python (anexo 3). A modo de ejemplo se muestra el procedimiento con el segundo tramo.

$$\int_A^E T_2(x)dx = \int_{0,248}^{1,272} (-2,0435 + 17,8902x - 43,6065x^2 + 42,0824x^3 - 13,9035x^4)dx$$

$$= -2,0435x + 8,9451x^2 - 14,5355x^3 + 10,5206x^4 - 2,7807x^5 \Big|_{0,248}^{1,272}$$

$$= (-2,0435(1,272) + 8,9451(1,272)^2 - 14,5355(1,272)^3$$

$$+ 10,5206(1,272)^4 - 2,7807(1,272)^5)$$

$$- (-2,0435(0,248) + 8,9451(0,248)^2 - 14,5355(0,248)^3$$

$$+ 10,5206(0,248)^4 - 2,7807(0,248)^5) \approx 0,3815$$

Así, las superficies de los demás tramos son presentados en la siguiente tabla.

⁶ Decimales completos de los coeficientes en anexo 5.

Tabla 6: Áreas de cada tramo

Áreas de los Tramos, lago 2020 ⁷					
Tramo (T_i)	Área Resultante	Tramo (T_i)	Área Resultante	Tramo (T_i)	Área Resultante
1	0,0746	5	0,2967	9	0,0024
2	0,3815	6	0,2234	10	0,0572
3	0,5758	7	0,0290	11	0,2597
4	0,1595	8	0,0650	12	0,2583

Con esto en mente y considerando las expresiones para conocer la superficie del lago Peñuelas en 2020, se procede a calcular tal superficie.

$$A_{cuadrante\ I} = (0,3815 + 0,5758 + 0,2967 + 0,2234 + 0,0290) \\ - (0,0746 + 0,1595 + 0,0650) \approx 1,5065 - 0,2992 \approx 1,2073$$

$$A_{cuadrante\ IV} = (0,0024 + 0,2597 + 0,2583) - (0,0572) \approx 0,5204 - 0,0572 \approx 0,4632$$

$$A_{total\ 2020} = A_{cuadrante\ I} + A_{cuadrante\ IV} = 1,2073 + 0,4632 \approx 1,6705$$

Como se evidencia en los cálculos, el resultado obtenido es de aproximadamente 1,6705.

Al igual que en el primer caso estudiado, los puntos están en una escala de 1: 1000. Por lo que tal valor debe ser multiplicado por $1 \cdot 10^6$. Resultando así, la superficie del lago Peñuelas en el año 2020 $1670478,6299803 m^2$ o $1,6705 km^2$. Tal resultado es verosímil con la realidad ya que al compararlo con la estimación inicial presentada en la siguiente figura se visualiza una ligera diferencia en el valor. Cabe destacar que este cálculo de la superficie del lago puede estar perjudicada por un alto grado de error. Esto porque, al igual que en el caso de 1984, los puntos estratégicos fueron elegidos a mano alzada marcando el punto en el mapa de coordenadas.



Figura 13: Captura de pantalla de Google Earth con estimación de valor a obtener

⁷ Decimales completos en anexo 5.

3.3. Comparación de Casos

Con los valores de las superficies del lago Peñuelas obtenidas, 16km^2 en 1984 y $1,6\text{km}^2$ en 2020 respectivamente, se visualiza como al pasar el tiempo, el nivel del agua en este lago ha ido disminuyendo a gran escala. Se puede estimar que en 1984 el lago era 10 veces mayor en cuanto a superficie que en 2020. Siendo la razón exacta presentada en la siguiente expresión.

$$16,823 \div 1,671 = 10,0708931373664$$

De esta manera, se muestra que producto del calentamiento global el lago Peñuelas ha disminuido aproximadamente 10,071 veces su tamaño en un periodo de tan solo 36 años. A continuación, se presenta una comparación gráfica de esta situación.

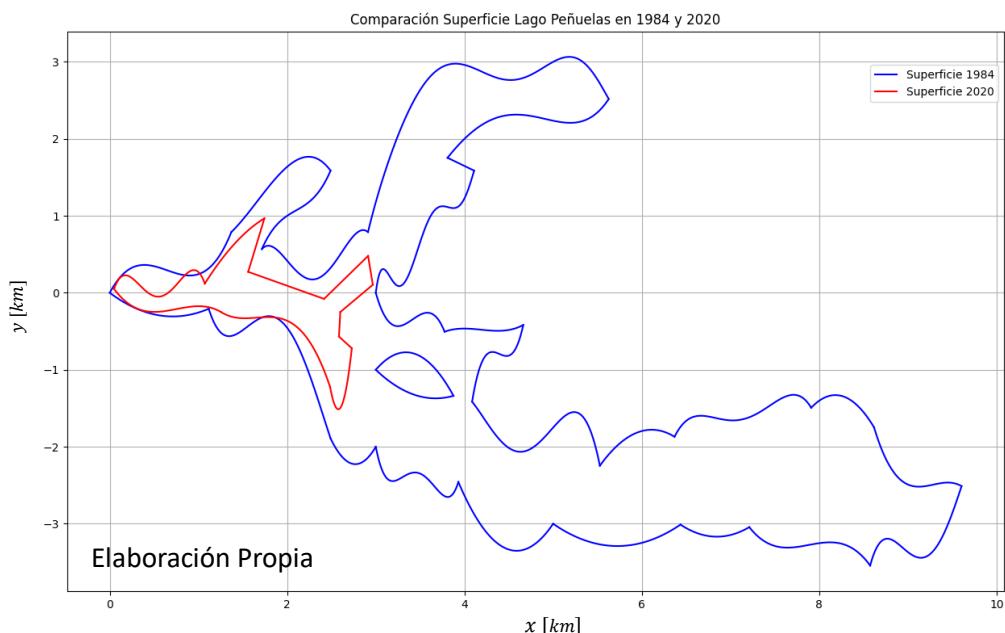


Figura 14: comparación gráfica del tamaño del lago Peñuelas en 1984 y 2020

Aquí se visualiza el gran impacto del cambio climático no solo en mi región, sino que, en todo el mundo, donde lagos, ríos, lagunas y embalses han disminuido su tamaño a gran escala. Es por esto que en esta exploración matemática se incorpora la importancia de cuidar nuestro planeta y el medioambiente porque de lo contrario todos salen perjudicados, perdiendo lugares asombrosos que además son hábitat para una gran gamma de flora y fauna.

4. REFLEXIONES

A modo de reflexión, y como se visualiza a lo largo de toda la exploración, pude cumplir tanto el objetivo principal como los objetivos específicos ya que logré conocer cuánto es que la superficie de este icónico lago ha disminuido en los últimos 36 años. Logré interpolar con un alto grado de precisión que me permitió modelar la curva del lago y de la misma manera logré integrar y calcular el área entre curvas de una manera eficaz mostrando una gran fortaleza donde se logró conocer aproximadamente el área del lago Peñuelas en 1984 y 2020 y además cuánto disminuyó. Sin embargo, esta exploración se limita en que los puntos escogidos fueron colocados al ojo en *Geogebra* donde la foto del lago estaba a una escala de 1: 1000 [m], por lo que un pequeño error al elegir donde colocar el punto podría significar una gran variación en mis resultados. En esta exploración se interpolaron los puntos para encontrar diversos polinomios, ya que así se hacía más sencillo y más práctico el integrar y calcular el área porque eran menos funciones. Sin embargo, y a modo de evaluación, si se quiere un mayor grado de precisión se podrían interpolar *splines cúbicos*⁸ porque permite modelar de mejor manera el contorno del lago y se evitan los cortes de la continuidad entre las funciones polinómicas. No obstante, el cálculo de las áreas es más tedioso ya que no se tendrían 27 funciones en el caso de 1984, se tendrían aproximadamente más de 80 funciones. Con esto en mente, este trabajo se vincula con otras áreas de conocimiento como la Geografía y la Historia ya que se estudia como es que la geografía de nuestro planeta ha ido variando con el pasar de los años y, a su vez, se reflexiona acerca del alcance y la ética del cambio climático y cómo es que este problema puede afectar a futuras generaciones donde los próximos actores del conocimiento estarían limitados debido a las consecuencias del calentamiento global.

⁸ Funciones cúbicas entre cada punto donde la primera y la segunda derivada es la misma entre cada función, permitiendo una continuidad entre todos los puntos. Este método se utiliza en programas de alta precisión como *Illustrator*, *Autocad* o *Inventor*.

REFERENCIAS

- [a] Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable trascendentes tempranas*.
- [b] Chapra, S. C., & Canale, R. P. (1987). Métodos numéricos para ingenieros: con aplicaciones en computadoras personales.
- [c] Awada, N., Belcher, P., Wathall, J. C., Duxbury, P., Forrest, J., Halsey, T., Harcet, J., Harrison, R., Heinrichs, L., Kemp, E., La Rondie, P., Seiler, P. M., Stevens, J., Thompson, E., & Torres-Skoumal, M. (2019). *Mathematics: Analysis and Approaches : Higher Level : Course Companion*.
- [d] A- Ejemplos interpolacion. (s. f.). Scribd.
<https://es.scribd.com/document/93429878/A-Ejemplos-Interpolacion>

Referencias a Figuras y Tablas

Figura 1: <https://psu.pb.unizin.org/math110/chapter/6-1-antiderivatives/>

Figura 2: <https://earthengine.google.com/timelapse#v=-33.15076,-71.51223,12.271,latLng&t=3.83&ps=50&bt=19840101&et=20221231>

Anexos

Anexo 1:

A continuación, se presenta una tabla que muestra las coordenadas de cada punto utilizado para hallar las funciones que modelan el contorno del lago en 1984. Cabe destacar que hay 4 puntos extras que fueron incluidos después de nombrar cada punto. Estos están expresados como 'xtraN', donde el xtra 1 se incluye en el tramo 10, el xtra2 en el tramo 13, el xtra3 en el tramo 15 y el xtra4 en el tramo 23 respectivamente.

Tabla 7: Puntos a Interpolcar 1984, (Link Excel: [1984_2665 \(7\).xlsx](#)).

nº	pto	eje x	eje y
1	A	0.000	0.000
2	B	0.739	0.257
3	C	1.161	0.368
4	D	1.371	0.789
5	E	1.925	1.554
6	F	2.213	1.765
7	G	2.490	1.587
8	H	2.324	1.266
9	I	2.000	1.000
10	J	1.715	0.568
11	K	2.003	0.413
12	L	2.402	0.224
13	M	2.679	0.634
14	N	2.912	0.789
15	O	3.011	1.222
16	P	3.344	2.297
17	Q	3.809	2.962
18	R	4.131	2.906
19	S	5.000	3.000
20	T	5.372	2.962
21	U	5.627	2.518
22	V	4.851	2.274
23	W	4.363	2.274
24	Z	4.000	2.000
25	A1	3.809	1.754
26	B1	4.109	1.587
27	C1	3.987	1.199
28	D1	3.732	1.122
29	E1	3.543	0.800
30	F1	3.388	0.280
31	G1	3.133	0.257
32	H1	3.000	0.000
33	I1	3.178	-0.407
34	J1	3.521	-0.274
35	K1	3.776	-0.506
36	L1	4.131	-0.473
37	M1	4.663	-0.418
38	N1	4.219	-0.850
39	O1	4.463	-0.820
40	P1	4.086	-1.415
41	Q1	4.242	-1.670
42	R1	4.552	-2.047
43	S1	5.084	-1.648
44	T1	5.527	-2.246
45	U1	6.369	-1.870
46	V1	6.735	-1.604
47	W1	7.190	-1.626
48	Z1	7.644	-1.338
49	A2	7.910	-1.493
50	B2	8.619	-1.748
51	C2	8.830	-2.313
52	D2	9.196	-2.512
53	E2	9.606	-2.512
54	F2	9.439	-3.044
55	G2	9.096	-3.432
56	H2	8.918	-3.288
57	I2	8.575	-3.543
58	J2	8.065	-3.244
59	K2	7.622	-3.310
60	L2	7.212	-3.044
61	M2	6.802	-3.166
62	N2	6.436	-3.011
63	O2	5.671	-3.288
64	P2	5.000	-3.000
65	Q2	4.729	-3.310
66	R2	3.931	-2.457
67	S2	3.643	-2.490
68	T2	3.455	-2.335
69	U2	3.189	-2.446
70	V2	3.000	-2.000
71	W2	2.490	-1.892
72	Z2	2.103	-0.650
73	A3	1.881	-0.329
74	B3	1.327	-0.562
75	C3	1.116	-0.207
76	D3	0.717	-0.307
77	E3	3.000	-1.000
78	F3	3.344	-1.282
79	G3	3.588	-0.894
80	H3	3.876	-1.338
81	xtra1	4.450	-0.490
82	xtra2	5.900	-1.840
83	xtra3	8.302	-1.360
84	xtra4	2.600	-2.103

Anexo 2:

A continuación, se presenta una tabla que muestra las coordenadas de cada punto utilizado para hallar las funciones que modelan el contorno del lago en 1984.

Tabla 8: Puntos a interpolar 2020, (Link Excel: [2020_32.xlsx](#)).

nº	pto	eje x	eje y
1	A	0.248	0.301
2	B	0.477	0.416
3	C	0.645	0.240
4	D	0.951	0.354
5	E	1.272	0.370
6	F	1.585	0.859
7	G	1.944	1.218
8	H	1.761	0.522
9	I	2.616	0.171
10	J	3.113	0.729
11	K	3.167	0.354
12	L	2.800	0.000
13	M	2.785	-0.318
14	N	2.930	-0.471
15	O	2.876	-0.929
16	P	2.685	-0.975
17	Q	2.479	-0.433
18	R	1.959	-0.066
19	S	1.455	0.000
20	T	0.852	0.118
21	U	0.401	0.118

Anexo 3:

A continuación, se muestra el código en Python utilizado para realizar las operaciones. Estas son, construcción de matriz, interpolación de puntos, solución de sistema de ecuaciones para obtener los coeficientes, construcción de los polinomios, integración e integración definida de los polinomios. Además, Este código permite hacer tales operaciones para todos los tramos de corrido.

```
# /for para repetir este proceso con los n tramos. este código está adaptado al caso
# de 1984.sin embargo, este mismo código se utiliza para el caso de 2020 solo
# que se debe reemplazar el 27 por un 12 y seleccionar el archivo excel correspondiente.

for n in range(27): #muestra como ejemplo el caso de 1984

    #definición del tramo a interpolar
    n_str = str(object= n+1)
    tramo = f"tramo{n_str}"
    archivo_excel = pd.read_excel(open('excels/1984_2665 (7).xlsx', 'rb')), #se llama al archivo con los puntos
    sheet_name= tramo
    values = archivo_excel['puntos'].values

    #coordenadas de los puntos pertenecientes al tramo
    X = ['X']
    Y = ['Y']
    cx = archivo_excel[X]
    cy = archivo_excel[Y]
    qp = len(cy) #qp = cantidad de puntos del tramo

    #construcción de matriz
    nt = int(n)-1
    A = np.zeros((qp,qp)) #matriz ((k+1)(k+1))
    for i in range(qp):
        A[:,i] = cx['X']**i
    y = cy['Y']
    coef = np.linalg.solve(A,y) #solución de la matriz -> valor del coeficiente

    #definición del polinomio
    def polinomio(coef, x):
        y = 0
        for i in range(len(coef)):
            y += coef[i]*x**i
        return y

    #integral del polinomio
    def integral(coef,x):
        y = 0
        for i in range(len(coef)):
            y += (coef[i]*x***(i+1))/(i+1) #teorema fundamental del cálculo
        return y

    #integral definida
    area = integral(coef,np.max(cx)) - integral(coef, np.min(cx))

    #output -> Entrega el polinomio, la integral y el área del tramo
    p = np.polynomial.polynomial.Polynomial(coef[:])
    print(f'{tramo} = {p}') #polinomio
    p_int = p.integ()
    print(f'integral de {tramo} = {p_int}') #integral
    print(f'Area {tramo} = {area}') #área
    print('')
```

Figura 15: Código de Python

Anexo 4:

A continuación, se presenta el output de código en Python que muestra los decimales completos de los coeficientes de los polinomios e integrales. Además del área de cada tramo, 1984.

```
1 tramo1 = 0.0 + 2.17203242 x - 3.9933913 x**2 + 2.06337242 x**3
2 integral de tramo1 = 0.0 + 0.0 x + 1.08601621 x**2 - 1.33113043 x**3 + 0.51584311 x**4
3 Area tramo1 = 0.4335133194073366
4
5 tramo2 = 5.55003752 - 10.85440181 x + 7.42315095 x**2 - 1.48720592 x**3
6 integral de tramo2 = 0.0 + 5.55003752 x - 5.42720091 x**2 + 2.47438365 x**3 - 0.37180148 x**4
7 Area tramo2 = 1.6072708430400429
8
9 tramo3 = -41.03717847 + 58.86235662 x - 27.72653534 x**2 + 4.40232583 x**3
10 integral de tramo3 = 0.0 - 41.03717847 x + 29.43117831 x**2 - 9.24217845 x**3 + 1.10058146 x**4
11 Area tramo3 = 0.8318712324506343
12
13 tramo4 = -166.87073288 + 305.94432699 x - 205.99498475 x**2 + 60.51884064 x**3 -
14 6.54824798 x**4
15 integral de tramo4 = 0.0 - 166.87073288 x + 152.97216349 x**2 - 68.66496825 x**3 +
16 15.12971016 x**4 - 1.3096496 x**5
17 Area tramo4 = 0.545481140109473
18
19 tramo5 = -4047.83463051 + 7240.07868375 x - 5510.58933907 x**2 +
20 2308.07772682 x**3 - 573.44329245 x**4 + 84.42109946 x**5 -
21 6.81539285 x**6 + 0.2327308 x**7
22 integral de tramo5 = 0.0 - 4047.83463051 x + 3620.03934188 x**2 - 1836.86311302 x**3 +
23 577.01943171 x**4 - 114.68865849 x**5 + 14.07018324 x**6 -
24 0.97362755 x**7 + 0.02909135 x**8
25 Area tramo5 = 7.213804092774126
26
27 tramo6 = 88.36849111 - 92.83642179 x + 35.45128378 x**2 - 5.78680878 x**3 +
28 0.34418913 x**4
29 integral de tramo6 = 0.0 + 88.36849111 x - 46.4182109 x**2 + 11.81709459 x**3 -
30 1.4467022 x**4 + 0.06883783 x**5
31 Area tramo6 = 4.02847268638439
32
33 tramo7 = 3.87434333 - 0.55666667 x
34 integral de tramo7 = 0.0 + 3.87434333 x - 0.27833333 x**2
35 Area tramo7 = 0.5011499999999991
36
37 tramo8 = -191189.72507083 + 320553.32231055 x - 223191.8739079 x**2 +
38 82606.60416421 x**3 - 17141.33765976 x**4 + 1890.86610971 x**5 -
39 86.63073161 x**6
40 integral de tramo8 = 0.0 - 191189.72507083 x + 160276.66115527 x**2 - 74397.29130263 x**3 +
41 20651.65104105 x**4 - 3428.26753195 x**5 + 315.14435162 x**6 -
42 12.3758188 x**7
43 Area tramo8 = 0.7986253194394521
44
45 tramo9 = -371.71077708 + 328.43157651 x - 96.40843319 x**2 + 9.41081282 x**3
46 integral de tramo9 = 0.0 - 371.71077708 x + 164.21578826 x**2 - 32.1361444 x**3 +
47 2.35270321 x**4
48 Area tramo9 = 0.2552789184326798
49
50 tramo10 = 78.78551803 - 56.34654185 x + 13.48718499 x**2 - 1.07390126 x**3
51 integral de tramo10 = 0.0 + 78.78551803 x - 28.17327092 x**2 + 4.49572833 x**3 - 0.26847532 x**4
52 Area tramo10 = 0.42221530237515026
53
54 tramo11 = 2233.12341511 - 1524.9285174 x + 347.11899518 x**2 - 26.32964451 x**3
55 integral de tramo11 = 0.0 + 2233.12341511 x - 762.4642587 x**2 + 115.70633173 x**3 -
56 6.58241113 x**4
57 Area tramo11 = 0.478173150465409
58
59 tramo12 = 1465.98586433 - 1301.99854737 x + 430.93559295 x**2 - 62.93813132 x**3 +
60 3.42341465 x**4
61 integral de tramo12 = 0.0 + 1465.98586433 x - 650.99927368 x**2 + 143.64519765 x**3 -
62 15.73453283 x**4 + 0.68468293 x**5
63 Area tramo12 = 2.6042175701613814
64
65 tramo13 = 52.89403596 - 16.72850272 x + 1.3686909 x**2
```

Figura 16: Output del Código de Python modificado para el caso de 1984

continuación anexo 4

```

68
69 tramo14 = 5669.90494606 - 3194.83163242 x + 674.11126139 x**2 - 63.10446872 x**3 +
70 2.21114294 x**4
71 integral de tramo14 = 0.0 + 5669.90494606 x - 1597.41581621 x**2 + 224.7037538 x**3 -
72 15.77611718 x**4 + 0.44222859 x**5
73 Area tramo14 = 2.3912672362339435
74
75 tramo15 = 148.9686695 - 36.08481303 x + 2.20488079 x**2
76 integral de tramo15 = 0.0 + 148.9686695 x - 18.04240651 x**2 + 0.73496026 x**3
77 Area tramo15 = 1.017964276635439
78
79 tramo16 = -2428.49954271 + 785.73070087 x - 84.62667835 x**2 + 3.03727611 x**3
80 integral de tramo16 = 0.0 - 2428.49954271 x + 392.86535044 x**2 - 28.20889278 x**3 +
81 0.75931903 x**4
82 Area tramo16 = 2.357932873273967
83
84 tramo17 = 52228.15551849 - 22597.71288743 x + 3662.18248561 x**2 -
85 263.43280144 x**3 + 7.09653386 x**4
86 integral de tramo17 = 0.0 + 52228.15551849 x - 11298.85644371 x**2 + 1220.7274952 x**3 -
87 65.85820036 x**4 + 1.41930677 x**5
88 Area tramo17 = 3.328926760746981
89
90 tramo18 = -608.19126472 + 233.16616999 x - 29.60966558 x**2 + 1.25221275 x**3
91 integral de tramo18 = 0.0 - 608.19126472 x + 116.58308454 x**2 - 9.86988853 x**3 +
92 0.31305319 x**4
93 Area tramo18 = 4.470742232066186
94
95 tramo19 = -40.39278727 + 12.72423055 x - 0.92919877 x**2
96 integral de tramo19 = 0.0 - 40.39278727 x + 6.36211527 x**2 - 0.30973292 x**3
97 Area tramo19 = 2.421707328126544
98
99 tramo20 = -14.77095173 + 6.30941889 x - 0.55104571 x**2
100 integral de tramo20 = 0.0 - 14.77095173 x + 3.15470944 x**2 - 0.1836819 x**3
101 Area tramo20 = 4.587854656877997
102
103 tramo21 = -40.22567564 + 18.99515264 x - 2.0700035 x**2
104 integral de tramo21 = 0.0 - 40.22567564 x + 9.49757632 x**2 - 0.69000117 x**3
105 Area tramo21 = 3.338223183855206
106
107 tramo22 = -3116.386508 + 3612.02325984 x - 1564.73528326 x**2 + 300.47799057 x**3 -
108 21.57989466 x**4
109 integral de tramo22 = 0.0 - 3116.386508 x + 1806.01162992 x**2 - 521.57842775 x**3 +
110 75.11949764 x**4 - 4.31597893 x**5
111 Area tramo22 = 2.2676414461416243
112
113 tramo23 = -30.50263369 + 23.63233957 x - 4.26604278 x**2
114 integral de tramo23 = 0.0 - 30.50263369 x + 11.81616979 x**2 - 1.42201426 x**3
115 Area tramo23 = 1.086775806818185
116
117 tramo24 = -40.75785711 + 94.51093007 x - 78.33320895 x**2 + 27.67841391 x**3 -
118 3.49403078 x**4
119 integral de tramo24 = 0.0 - 40.75785711 x + 47.25546504 x**2 - 26.11106965 x**3 +
120 6.919680348 x**4 - 0.69880616 x**5
121 Area tramo24 = 0.9016592493231208
122
123 tramo25 = 0.0 + 0.86428338 x - 0.60824329 x**2
124 integral de tramo25 = 0.0 + 0.0 x + 0.43214169 x**2 - 0.20274776 x**3
125 Area tramo25 = 0.25640848692861873
126
127 tramo26 = -9.64184454 + 5.99421399 x - 0.81564416 x**2
128 integral de tramo26 = 0.0 - 9.64184454 x + 2.997107 x**2 - 0.27188139 x**3
129 Area tramo26 = 1.1154262399020798
130
131 tramo27 = 22.69943388 - 13.13019523 x + 1.96568353 x**2
132 integral de tramo27 = 0.0 + 22.69943388 x - 6.56509761 x**2 + 0.65522784 x**3
133 Area tramo27 = 0.8038149183673404

```

Figura 17: Continuación del output del Código de Python modificado para el caso de 1984

Anexo 5:

A continuación, se presenta el output del código en Python que muestra los decimales completos de los coeficientes de los polinomios e integrales. Además del área de cada tramo, 2020.

```
1  tramo1 = 0.86076596 - 3.02874889 x + 3.40822264 x**2 - 1.19115917 x**3
2  integral de tramo1 = 0.0 + 0.86076596 x - 1.51437444 x**2 + 1.13607421 x**3 - 0.29778979 x**4
3  Area tramo1 = 0.07466383735239174
4
5  tramo2 = -2.04353692 + 17.89021228 x - 43.60654328 x**2 + 42.08239278 x**3 -
6  13.90354505 x**4
7  integral de tramo2 = 0.0 - 2.04353692 x + 8.94510614 x**2 - 14.53551443 x**3 +
8  10.52059819 x**4 - 2.78070901 x**5
9  Area tramo2 = 0.38154513993257205
10
11 tramo3 = -3.29780154 + 3.94482292 x - 0.8344111 x**2
12 integral de tramo3 = 0.0 - 3.29780154 x + 1.97241146 x**2 - 0.27813703 x**3
13 Area tramo3 = 0.5758482575544019
14
15 tramo4 = -6.15387178 + 3.79166667 x
16 integral de tramo4 = 0.0 - 6.15387178 x + 1.89583333 x**2
17 Area tramo4 = 0.1595322296458157
18
19 tramo5 = 1.24564552 - 0.41071429 x
20 integral de tramo5 = 0.0 + 1.24564552 x - 0.20535714 x**2
21 Area tramo5 = 0.29669716806453494
22
23 tramo6 = -2.76743906 + 1.12307692 x
24 integral de tramo6 = 0.0 - 2.76743906 x + 0.56153846 x**2
25 Area tramo6 = 0.22340678522293267
26
27 tramo7 = 22.5199748 - 7.0 x
28 integral de tramo7 = 0.0 + 22.5199748 x - 3.5 x**2
29 Area tramo7 = 0.028961964922110894
30
31 tramo8 = -2.70572633 + 0.96639895 x
32 integral de tramo8 = 0.0 - 2.70572633 x + 0.48319947 x**2
33 Area tramo8 = 0.06497875677592102
34
35 tramo9 = 58.25388448 - 20.80642525 x
36 integral de tramo9 = 0.0 + 58.25388448 x - 10.40321262 x**2
37 Area tramo9 = 0.0024287898334449665
38
39 tramo10 = -2.61316362 + 1.05263158 x
40 integral de tramo10 = 0.0 - 2.61316362 x + 0.52631579 x**2
41 Area tramo10 = 0.057236611678161076
42
43 tramo11 = -261.58008265 + 189.28778676 x - 34.07911138 x**2
44 integral de tramo11 = 0.0 - 261.58008265 x + 94.64389338 x**2 - 11.35970379 x**3
45 Area tramo11 = 0.2597015233789932
46
47 tramo12 = -10.58929862 + 17.42583607 x - 9.44520395 x**2 + 1.69799815 x**3
48 integral de tramo12 = 0.0 - 10.58929862 x + 8.71291804 x**2 - 3.14840132 x**3 + 0.42449954 x**4
49 Area tramo12 = 0.2583004365236379
50 |
```

Figura 18: Output del código de Python modificado para el caso de 2020